Université d'Aix-Marseille
Département de mathématiques *Master $1^{\text{ère}}$ année*
Analyse numérique

Éléments de théorie spectrale

Table des matières

1 Rappels et compléments d'analyse linéaire

Dans cette section $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Notations

Adjoint. Tout vecteur $v \in \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, est défini par n scalaires $v_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, et sera représenté par le vecteur colonne : $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Le *vecteur adjoint* de v est alors le vecteur ligne $v^* = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n})$ et le *vecteur transposé* de v est $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Structure hermitienne. L'application $(u, v) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \langle u, v\rangle = v^* u = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$ appelé *produit scalaire hermitien*. De même $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle u, v\rangle = v^T u = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ appelé *produit scalaire euclidien*. On parle de produit scalaire canonique si $\mathbb{K}$ n'est pas précisé. La norme $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$, $u \in \mathbb{K}^n$, qui dérive du produit scalaire canonique est appelée *norme hermitienne* ou *norme euclidienne* suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Orthogonalité. Deux vecteurs u et v de $\mathbb{K}^n$ sont *orthogonaux* si $\langle u, v\rangle = 0$. Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de $k \leq n$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est dite *orthonormale* si $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij},\ i, j = 1, \dots, k$. Un système orthonormal de $k = n$ vecteurs est une *base orthonormale* de $\mathbb{K}^n$.

Matrice adjointe. Soit $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices $m \geq 1$ lignes et $n \geq 1$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. La *matrice adjointe* de $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ est l'unique matrice $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ satisfaisant

$$\langle Au, v\rangle_m = \langle u, A^*v\rangle_n,\ \forall u \in \mathbb{C}^n,\ \forall v \in \mathbb{C}^m.$$

Ceci entraîne $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$. La *matrice transposée* A^T de $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est définie pour chaque $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$ par $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Elle vérifie évidemment

$$\langle Au, v\rangle_m = \langle u, A^Tv\rangle_n,\ \forall u \in \mathbb{R}^n,\ \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

Exercice 1. Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $m, n, p \geq 1$, montrer que :

(i) $(AB)^* = B^*A^*$.

(ii) si A est inversible alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Si $m = n$ on note $M_n(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices (carrées) de taille n.

Matrices particulières. Une matrice carrée A est dite :

(a) *symétrique* si A est réelle et $A^T = A$.

(b) *hermitienne* si $A^* = A$.

(c) *normale* si $A^*A = AA^*$.

(d) *orthogonale* si A est réelle et $A^TA = AA^T = I$.

(e) *unitaire* si $A^*A = AA^* = I$.

Exercice 2. Justifier la caractérisation suivante des matrices unitaires :

$$\begin{aligned} U^*U = UU^* = I &\iff \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle,\ \forall x, y \\ &\iff U(\text{b.o.n.}) = \text{b.o.n.} \end{aligned}$$

Spectre. Le *spectre* de $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, est l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K},\ A - \lambda I \text{ singulière}\}.$$

Le *rayon spectral* de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

1.2 Réduction matricielle

Matrices carrées. Les matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Théorème 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

(a) Il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire telle que $U^{-1}AU$ est triangulaire.

(b) Si A est normale, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire telle que $U^{-1}AU$ est diagonale.

(c) Si A est symétrique, il existe $\mathcal{O} \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $\mathcal{O}^{-1}A\mathcal{O}$ est diagonale.

Décomposition en valeurs singulières. Les matrices A et B de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe $Q \in M_m(\mathbb{K})$ et $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $B = QAP$.
Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A^*A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne et positive de sorte qu'il existe n réels positifs (pas forcément distincts) μ_i, $i = 1, \ldots, n$, tels que

$$\sigma(A^*A) = \{\mu_i^2,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Autrement dit les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de A^*A.

Exercice 3. Montrer qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont > 0.

Théorème 2. Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ où $m \geq n$, il existe deux matrices unitaires $U \in M_m(\mathbb{C})$ et $V \in M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = U\Sigma V^*,\ \Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \mu_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

les μ_i étant les valeurs singulières de A.

1.3 Matrices hermitiennes

Décomposition spectrale. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne alors il existe n réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ tels que

$$\sigma(A) = \{\lambda_i,\ 1 \leq i \leq n\},$$

ainsi qu'une b.o.n. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A :

$$Av_i = \lambda_i v_i,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Quotient de Rayleigh. Le *quotient de Rayleigh* de $A \in M_n(\mathbb{C})$ est l'application :

$$\begin{array}{rccc} R_A : & \mathbb{C}^n - \{0\} & \to & \mathbb{C} \\ & v & \mapsto & \frac{\langle Av,v\rangle}{\langle v,v\rangle}. \end{array}$$

Si $A = A^*$ alors $R_A(v) \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ et l'on dispose alors du *principe du min-max* :

Théorème 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. On note $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une b.o.n. de vecteurs propres associés ($Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$), et l'on pose :

$$V_0 = \{0\} \text{ puis } V_k = \text{vect}\{v_1, \ldots, v_k\} \text{ et } \mathcal{V}_k = \{\text{sev de dim } k \text{ de } \mathbb{C}^n\},\ k = 1, \ldots, n.$$

Alors, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a :

(i) $\lambda_k = R_A(v_k) = \max_{u \in V_k} R_A(u) = \min_{u \in V_{k-1}^\perp} R_A(u)$.

(ii) $\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{w \in W} R_A(w)$.

(iii) $\lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{w \in W^\perp} R_A(w)$.

Positivité. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ supposée hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, est dite *positive* si elle vérifie

$$\langle Av, v\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathbb{K}^n,$$

ce qui se note $A \geq 0$. Elle est dite *définie positive* si elle satisfait de plus l'implication :

$$\forall v \in \mathbb{K}^n, \ \langle Av, v\rangle = 0 \Longrightarrow v = 0, ;$$

et l'on écrit alors $A > 0$.

Proposition 4. Si A est hermitienne alors :

(i) $A \geq 0 \Longleftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$.

(ii) $A > 0 \Longleftrightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1.4 Norme matricielle

Norme vectorielle. Une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, est une application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ satisfaisant les trois axiomes suivants :

(i) $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$.

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ v \in \mathbb{K}^n$.

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall u, v \in \mathbb{K}^n$.

Pour tout $p \geq 1$, $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{1/p}$ définit une norme appelée *norme* p sur $\mathbb{K}^n$. Si $p = 2$ il s'agit évidemment de la norme euclidienne ou hermitienne suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. De même $\|v\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |v_i|$, est une norme appelée *norme infinie*. Elle peut être vue comme la limite des normes p en ce sens que $\|v\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|v\|_p, \ \forall v \in \mathbb{K}^n$. A toutes fins utiles rappelons l'*inégalité de Hölder*

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q, \ p > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

qui, dans le cas particulier où $p = 2$, est appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Norme matricielle. Une *norme matricielle* sur $M_n(\mathbb{K})$ est une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^{n^2}$ qui est continue pour le produit matriciel, en ce sens qu'elle vérife la condition supplémentaire suivante :

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \ \forall A, B \in M_n(\mathbb{K}).$$

Norme matricielle induite. Soit $\|.\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ la quantité

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\},\ \|v\| \leq 1} \|Av\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n,\ \|v\|=1} \|Av\|.$$

s'appelle *norme induite par* $\|.\|$ de A (on parle aussi de norme subbordonnée à $\|.\|$). C'est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$, qui vérifie entre autres propriétés immédiates :

(a) $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|,\ \forall v \in \mathbb{K}^n$.

(b) $\|A\| = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+,\ \|Av\| \leq \alpha\|v\|,\ \forall v \in \mathbb{K}^n\}$.

(c) $\exists u \in \mathbb{K}^n - \{0\},\ \|Au\| = \|A\|\|u\|$.

Dans le cas particulier où $\|.\| = \|.\|_p$ et $p = 1, 2, \infty$, il est possible de donner une expression explicite de la norme induite associée :

Proposition 5. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, alors :

(i) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

(ii) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$.

(iii) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

De plus $\|.\|_2$ est unitairement invariante :

$$\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2 = \|A\|_2,\ \forall U \in M_n(\mathbb{K}) \text{ unitaire.}$$

Remarque 6. Si A est normale alors $\rho(A^*A) = \rho(A)^2$ donc $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Exercice 4. Montrer que la norme de Frobenius

$$\|A\|_F = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$ qui si $n \geq 2$ n'est induite par aucune norme sur $\mathbb{K}^n$.

1.5 Perturbation de valeurs propres

Conditionnement. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. On note encore $\|.\|$ la norme matricielle induite correspondante. Le *conditionnement* d'une matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{K})$ associé à la norme $\|.\|$ est défini par le produit :

$$\operatorname{cond} A = \|A\|\|A^{-1}\| \geq 1.$$

Proposition 7. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, est inversible, on a :

(a) $\operatorname{cond}_2 A = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\mu_n}{\mu_1}$ où $\mu_1 > 0$ (resp. $\mu_n > 0$) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur singulière de A.

(b) Si A est normale, $\operatorname{cond}_2 A = \frac{\rho(A)}{\min_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|}$ où $\sigma(A) = \{\lambda_i,\ i = 1, \dots, n\}$.

Exercice 5. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, est inversible, vérifier que :

(a) $\operatorname{cond}(\alpha A) = \operatorname{cond} A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

(b) $\operatorname{cond}_2 U = 1$ et $\operatorname{cond}_2 A = \operatorname{cond}_2(AU) = \operatorname{cond}_2(UA) = \operatorname{cond}_2(U^*AU)$ si U est unitaire.

Un peu de théorie perturbative. Il est possible sous certaines conditions de contrôler la variation du spectre d'une matrice de référence A, induite par la modification ΔA de ses éléments.

(a) Cas général. Le résultat principal est le théorème de Bauer-Fike :

Théorème 8. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, une matrice diagonalisable : $P^{-1}AP = D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $\|.\|$ une norme matricielle induite. Alors pour toute matrice $\Delta A \in M_n(\mathbb{C})$ on a

$$\sigma(A + \Delta A) \subset \cup_{i=1}^{n} \Delta_i, \;\; \Delta_i = \{z \in \mathbb{C}, \;\; |z - \lambda_i| \leq (\mathrm{cond}\, P)\|\Delta A\|\}.$$

(b) Cas hermitien. Si la matrice de référence A et sa perturbation ΔA sont toutes deux hermitiennes, on dispose d'un résultat un peu plus précis :

Théorème 9. Soient $A, \Delta A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, deux matrices hermitiennes. Notant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n$ celles de $A + \Delta A$, on a :

$$|\beta_i - \lambda_i| \leq \|\Delta A\|_2, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

2 Calcul de valeurs propres

2.1 Le cas symétrique

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, une matrice symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \;\ldots, \lambda_n$.

Méthode de Jacobi.

(a) *Valeurs propres.* Il existe $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de matrices orthogonales telle que :

$$\lim_{k \to +\infty} O_k^T A O_k = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

(b) *Vecteurs propres.* Si les valeurs propres de A sont de plus 2 à 2 distinctes, la suite de matrices $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice O dont la $i^{ème}$ colonne est un vecteur propre de A associé à λ_i.

Méthode de Givens-Householder.

(a) *Réduction.* Il existe une matrice P orthogonale (obtenue comme produit de $n-2$ matrices de Householder) telle que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{i-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \;\; b_i \in \mathbb{R}, \;\; c_j \in \mathbb{R}^*.$$

(b) *Bissection.* Pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, on définit la famille de polynômes p_i à l'aide de la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = b_1 - x \\ p_i(x) = (b_i - x)p_{i-1}(x) - c_{i-1}^2 p_{i-2}(x) \text{ si } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En fait, p_i est simplement le polynôme caractéristique de la matrice B_i :

$$p_i(x) = \det(B_i - xI_i), \;\; B_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{i-2} & b_{i-1} & c_{i-1} \\ 0 & \ldots & 0 & c_{i-1} & b_i \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, le nombre $N_i(\mu)$ de racines de p_i qui sont $< \mu$ est égal au nombre de changements de signes dans la suite $(1, p_1(\mu), \ldots, p_n(\mu))$.

(c) *Dichotomie.* Partant de l'encadrement $a_0 \leq \lambda_i \leq b_0$ (on sait que $-a_0 = b_0 = \|B_n\|_1$ conviennent), il suffit de calculer $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ puis $N_n(c_0)$ à l'aide du (b) :

(i) si $N_n(c_0) \geq i$ alors $\lambda_i \in [a_0, c_0[$

(ii) si $N_n(c_0) < i$ alors $\lambda_i \in [c_0, b_0]$.

2.2 Cas général

Méthode de la puissance. On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et qu'elle possède une unique valeur propre λ_1 de module maximal :

$$\forall \lambda \in \sigma(A) - \{\lambda_1\}, \;\; |\lambda| < \rho(A) = |\lambda_1|.$$

Soit $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ une base de $\mathbb{C}^n$ vecteurs propres de A : $Ap_i = \lambda_i p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(a) *Résultat.* Pour tout $u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ tel que $\alpha_1 \neq 0$, la suite récurrente suivante

$$u_{k+1} = Au_k, \;\; k \geq 0,$$

permet de calculer λ_1 ainsi qu'un vecteur propre associé :

(i) Pour tout $w \in \mathbb{C}^n$ tel que $w^* p_1 \neq 0$,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{w^* A u_k}{w^* u_k} = \lambda_1.$$

(ii) La suite $\left(\left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_1} \right)^k \frac{u_k}{\|u_k\|} \right)_k$ converge vers un vecteur non nul de $\ker(A - \lambda_1 I)$.

(b) *Généralisation au cas d'une valeur propre λ_1 de multiplicité $p > 1$.* Si l'un au moins des coefficients α_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, est non nul alors (ii) reste vrai. Et si l'on suppose de plus que $w^* \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i p_i \right) \neq 0$ alors (i) est conservé.

(c) *Facteur de convergence.* Les données u_0 et w vérifiant les hypothèses du (b) on pose $s_k = \frac{w^* A u_k}{w^* u_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Le facteur de convergence c pour la suite $s = (s_k)_k$ de limite λ_1 d'après ce qui précède, est :

$$c(s) := \lim_{k \to +\infty} \frac{|s_k - s_{k-1}|}{|s_{k+1} - s_k|} = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_{p+1}|}.$$

(d) *Déflation.* On suppose A diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. On note v_i un vecteur propre associé à λ_i : $Av_i = \lambda_i v_i$. Sans restreindre la généralité de la méthode, on peut choisir la première composante de v_i égale à 1 : $(v_i)_1 = 1$. Notant $a = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ la première ligne de A, on a

$$(Av_i)_1 = \lambda_i (v_i)_1 \Longleftrightarrow a^T v_i = \lambda_i, \ 1 \leq i \leq n,$$

de sorte que la matrice

$$B = A - v_1 a^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & \tilde{B} & \\ * & & & \end{pmatrix}, \ \tilde{B} \in M_{n-1}(\mathbb{R}),$$

satisfait :

$$Bv_1 = 0 \text{ et } Bw_i = \lambda_i w_i \text{ pour } w_i = v_i - v_1, \ 2 \leq i \leq n.$$

Par définition $w_i = \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix}$ où $u_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, donc $Bw_i = \lambda_i w_i \Longleftrightarrow \tilde{B} u_i = \lambda_i u_i$ pour $i = 2, \ldots, n$, ce qui montre que l'on s'est ramené à un nouveau problème de valeurs propres sur la matrice $\tilde{B}$ d'ordre $n - 1$ avec :

$$\sigma(\tilde{B}) = \sigma(A) - \{\lambda_1\}.$$

De plus les vecteurs propres de A s'obtiennent à partir de ceux de $\tilde{B}$ par "translation".

(e) *Méthode de la puissance inverse.* Ici $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, désigne encore une matrice diagonalisable, et $\delta \in \sigma(A)$. Afin de calculer δ (qui est supposé déjà grossièrement localisé), on choisit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$0 < |\mu - \delta| < d(\mu, \sigma(A) - \{\delta\}) = \min_{\lambda \in \sigma(A) - \{\delta\}} |\mu - \lambda|.$$

Ainsi, $\mu \in \mathbb{C} - \sigma(A)$ (appelé *ensemble résolvant de* A) et

$$|(\delta - \mu)^{-1}| = \rho((A - \mu)^{-1}) > |\lambda|, \ \forall \lambda \in \sigma((A - \mu)^{-1}) - \{(\delta - \mu)^{-1}\}.$$

La méthode de la puissance inverse est simplement la méthode de la puissance appliquée au cas de la matrice $(A - \mu)^{-1}$ (appelée *résolvante de* A *au point* μ). Pour un vecteur u_0 convenablement choisi, on définit donc la suite récurrente :

$$(A - \mu I) u_{k+1} = u_k, \ k \geq 0.$$

Le facteur de convergence de la méthode est :

$$\frac{|(\delta - \mu)^{-1}|}{\max_{\lambda \in \sigma(A), \ \lambda \neq \delta} |(\lambda - \mu)^{-1}|} = \frac{\min_{\lambda \in \sigma(A), \ \lambda \neq \delta} |\lambda - \mu|}{|\delta - \mu|}.$$

Méthode QR. On rappelle qu'étant donnée une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice Q unitaire ainsi qu'une matrice R triangulaire supérieure telles que $A = QR$. De plus il est possible de choisir les coefficients diagonaux de R tous ≥ 0. Dans ce cas la décomposition QR précédente est unique si A est inversible.
Supposant A inversible, on peut donc définir la suite matricielle $(A_k)_k$ comme suit : partant de l'unique factorisation Q_1R_1 de $A_1 = A$ telle que $(R_1)_{ii} > 0$, on définit $A_2 = R_1Q_1$. On factorise ensuite A_2 de façon unique sous la forme Q_2R_2, puis l'on définit $A_3 = R_2Q_2$. Et ainsi de suite : à l'étape $k \geq 1$, on définit $A_{k+1} = R_kQ_k$ à partir de l'unique factorisation Q_kR_k de A_k telle que $(R_k)_{ii} > 0$.
La suite $(A_k)_k$ ainsi construite est telle que :

$$(A_k)_{ii} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

à conditon que les deux hypothèses supplémentaires suivantes soient satisfaites :

1. La matrice A a toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de modules différents, de sorte qu'elle est diagonalisable : il existe P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n);$$

2. La matrice de passage P^{-1} admet une décomposition LU.

3 Quelques exercices et problèmes

3.1 Sur la décomposition en valeurs singulières

Exercice 6. A désignant une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{C})$ où $m \geq n$, on rappelle qu'il existe deux matrices unitaires $U \in M_m(\mathbb{C})$ et $V \in M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = U\Sigma V^*,\ \Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \mu_n \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, $u_i \in \mathbb{C}^m$, $1 \leq i \leq m$, désigne la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice U et $v_k \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq k \leq n$, la $k^{\text{ième}}$ colonne de V. On note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $(\epsilon_k)_{1\leq k\leq m}$ celle de $\mathbb{C}^m$.

1. Montrer que $V^* = \sum_{i=1}^n e_i v_i^*$, $\Sigma V^* = \sum_{i=1}^n \mu_i \epsilon_i v_i^*$ et $A = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i v_i^*$.
2. Montrer que $A^*A = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 v_i v_i^*$.
3. Supposant que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \ldots = \mu_n = 0$, $r \geq 1$, en déduire que
   (a) $\ker A = \ker A^*A = \mathrm{vect}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$
   (b) $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{vect}\{u_1, \ldots, u_r\}$
   (c) $\mathrm{Im}\, A^* = \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_r\} = (\ker A)^\perp$.

Exercice 7. (Pseudo-inverse). Soient $m \geq n \geq r \geq 1$ et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *pseudo-inverse* de

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mu_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

la matrice de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mu_r^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ dont la décomposition en valeurs singulières s'écrit $A = U\Sigma V^*$. Alors la pseudo-inverse de A est définie par :

$$A^+ = V\Sigma^+U^* \in M_{n,m}(\mathbb{C}).$$

En particulier si A est inversible alors $m = n = r$ et l'on voit que $AA^+ = A^+A = I_n$, ce qui montre que $A^+ = A^{-1}$: A^+ est donc une généralisation de A^{-1}.

Avec les notations précédentes, montrer que :

1. $\Sigma^+U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} e_i u_i^*$, puis que $A^+ = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} v_i u_i^*$.
2. $AA^+ = \sum_{i=1}^r u_i u_i^*$; En déduire que AA^+ est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$.
3. $A^+A = \sum_{i=1}^r v_i v_i^*$; En déduire que A^+A est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A^*$.

3.2 Sur la notion de norme matricielle

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$

Exercice 8. (Norme matricielle et rayon spectral).

1. Montrer que pour toute norme matricielle $\|.\|$ (induite ou non), on a $\rho(A) \leq \|A\|$. *Indication :* Remarquer que pour tout $u \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, la matrice uv^*, où v est la vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont tous les éléments valent 1, est non nulle, puis utiliser la continuité du produit matriciel.

2. Soient $\delta > 0$ et D_δ la matrice diagonale de taille n telle que $(D_\delta)_{i,i} = \delta^{i-1}$. On rappelle que A est unitairement semblable à une matrice triangulaire T (supérieure pour fixer les idées) : il existe U unitaire telle que $U^*AU = T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. On pose alors $U_\delta = UD_\delta$, puis l'on définit la norme suivante :

$$\|A\|_\delta = \|U_\delta^{-1}AU_\delta\|_\infty.$$

   (a) Montrer que $\|.\|_\delta$ est la norme matricielle induite par la norme vectorielle $\|U_\delta^{-1}v\|_\infty$.
   (b) Calculer $U_\delta^{-1}AU_\delta$ puis $\|A\|_\delta$ en fonction de δ, des valeurs propres de A et des éléments de la matrice T.
   (c) Etant donné $\epsilon > 0$, montrer que l'on peut choisir $\delta > 0$ pour que $\|A\|_\delta \leq \rho(A) + \epsilon$.

Exercice 9. (Convergence d'une suite de matrices). Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $A^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(ii) Quel que soit $v \in \mathbb{C}^n$, $A^n v \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(iii) $\rho(A) < 1$

(iv) Il existe une norme matricielle induite $\|.\|$ telle que $\|A\| < 1$.

Indication : Utiliser l'exercice précédent pour montrer l'implication $(iii) \Longrightarrow (iv)$.

Exercice 10. (Inversibilité). Montrer que :

1. Si $I_n - A$ est singulière, alors $\|A\| \geq 1$ pour toute norme matricielle $\|.\|$.
2. Si $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle induite $\|.\|$, alors $I_n - A$ est inversible et $\|(I_n - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

Exercice 11. (Conditionnement et perturbation d'un système linéaire). On suppose la matrice A inversible et l'on se donne $b \neq 0$ et Δb dans $\mathbb{C}^n$. Dans la suite de cet exercice, $u = A^{-1}b$ et $\|.\|$ désigne une norme matricielle induite.

1. *Perturbation du second membre b.*
   (a) Posant $\Delta u = A^{-1}\Delta b$, montrer que $\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.
   (b) Montrer que l'inégalité précédente est optimale, c'est-à-dire qu'il existe b et Δb non nuls pour lesquels cette inégalité devient une égalité.
2. *Perturbation de la matrice A.*
   (a) On considère une matrice $\Delta A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que l'équation $(A + \Delta A)x = b$ possède au moins une solution, notée $u + \Delta u$. Montrer que $\frac{\|\Delta u\|}{\|u+\Delta u\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.
   (b) Montrer que l'inégalité précédente est optimale, c'est-à-dire qu'il existe b et ΔA non nuls pour lesquels cette inégalité peut être remplacée par une égalité.

Exercice 12. (Inégalité de Kantorovitch). On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, symétrique définie positive. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres et $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ une base othonormale de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres associés ($Av_k = \lambda_k v_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$).
Le but de cet exercice est d'établir l'inégalité de Kantorovitch :

$$1 \leq \frac{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle}{\|x\|^4} \leq \frac{(1 + \mathrm{cond}_2 A)^2}{4\mathrm{cond}_2 A}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}. \tag{1}$$

(a) Rappeler l'expression de $\mathrm{cond}_2 A$ en fonction de λ_1 et λ_n.

(b) On pose $p(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\lambda + \lambda_1\lambda_n$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - (i) Montrer que $p(\lambda_k) \leq 0$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$.
   - (ii) Calculer les valeurs propres de la matrice $B = A^{-1}p(A)$ et en déduire que $\langle Bx, x\rangle \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, on pose $f(\lambda) = \lambda^2(Ax, x) - (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2\lambda + \lambda_1\lambda_n\langle A^{-1}x, x\rangle$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - (i) En comparant $f(1)$ et (Bx, x), montrer que $f(0)f(1) \leq 0$, puis que
   $$(\lambda_1 + \lambda_n)^2\|x\|^4 - 4\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle\lambda_1\lambda_n \geq 0.$$
   - (ii) En déduire alors que :
   $$\frac{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle}{\|x\|^4} \leq \frac{(1 + \mathrm{cond}_2 A)^2}{4\mathrm{cond}_2 A}.$$
   - (iii) Montrer en examinant le cas particulier du vecteur $x = v_1 + v_n$ que l'inégalité précédente est optimale.

(d) Etablir enfin l'inégalité de gauche dans (1) et montrer qu'elle est optimale.

3.3 Sur la méthode de Jacobi

Transformation d'une matrice symétrique par rotation. On considère la matrice de rotation dans $\mathbb{R}^n$ des $p^{\text{ème}}$ et $q^{\text{ème}}$ vecteurs de base, $1 \leq p < q \leq n$:

$$R = R(p, q, \theta) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& c && \cdots && s &&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots && \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& -s && \cdots && c && \\ &&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}, \ c = \cos\theta, \ s = \sin\theta.$$

Etant donnée une matrice symétrique $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit :

$$B = R^T A R = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

1. Montrer que :

$$\begin{cases} b_{ij} &= a_{ij} & \text{si } i \neq p,q \text{ et } j \neq p,q \\ b_{pj} &= ca_{pj} - sa_{qj} & \text{si } j \neq p,q \\ b_{qj} &= sa_{pj} + ca_{qj} & \text{si } j \neq p,q \\ b_{pp} &= c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2cs a_{pq} & \\ b_{qq} &= s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2cs a_{pq} & \\ b_{pq} &= (c^2 - s^2) a_{pq} + cs(a_{pp} - a_{qq}). & \end{cases}$$

2. On suppose $a_{pq} \neq 0$ et l'on cherche à déterminer θ (donc c et s) tel que $b_{pq} = 0$.
   (a) Montrer que dans ce cas ($b_{pq} = 0$) on a nécessairement $c \neq 0$.
   (b) En déduire que $t = s/c$ est alors solution de l'équation :

   $$t^2 + 2\chi t - 1 = 0, \text{ où } \chi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}.$$

   (c) Prouver enfin qu'il existe $\theta \in]-\pi/4, 0[\cup]0, \pi/4]$ unique, tel que $b_{pq} = 0$.

Méthode de Jacobi classique. L'idée est de diagonaliser A par une suite (infinie) de transformations semblables orthogonales :

$$\begin{cases} A_1 &= A \\ A_{k+1} &= R_k^T A_k R_k, \ k \geq 1, \end{cases}$$

où R_k est une matrice de rotation élémentaire choisie pour annuler un élément non diagonal de A_k. Dans la méthode décrite ici, appelée méthode de Jacobi classique, on choisit un élément de plus grand module. Plus précisément, pour chaque matrice $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, on détermine les entiers $1 \leq p_k < q_k \leq n$ pour lesquels

$$|a_{p_k q_k}^{(k)}| = \max_{1\leq i\neq j\leq n} |a_{ij}^{(k)}|,$$

puis on ajuste $\theta_k \in]-\pi/4, \pi/4[$ de sorte que $a_{p_k q_k}^{(k+1)} = 0$ avec $R_k = R(p_k, q_k, \theta_k)$. Afin d'éviter les situations triviales, on peut supposer $a_{p_k q_k}^{(k)} \neq 0$.
En notant p (resp. q) à la place de p_k (resp. q_k), montrer que :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} & & & \text{si } i \neq p,q \text{ et } j \neq p,q \\ a_{pj}^{(k+1)} &= ca_{pj}^{(k)} &-& sa_{qj}^{(k)} & \text{si } j \neq p,q \\ a_{qj}^{(k+1)} &= sa_{pj}^{(k)} &+& ca_{qj}^{(k)} & \text{si } j \neq p,q \\ a_{pp}^{(k+1)} &= a_{pp}^{(k)} &-& ta_{pq}^{(k)} & \\ a_{qq}^{(k+1)} &= a_{qq}^{(k)} &+& ta_{pq}^{(k)}. & \end{cases}$$

Convergence de la méthode. On va montrer dans ce qui suit qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} a_{ii}^{(k)} = \lambda_{\sigma(i)}, \ 1 \leq i \leq n,$$

les λ_i désignant les valeurs propres de A.

1. On pose $D_k = \mathrm{diag}(a_{ii}^{(k)})$ puis $E_k = A_k - D_k$ pour tout $k \geq 1$.
   (a) En remarquant que $\|A_{k+1}\|_S = \|A_k\|_S$ (où $\|.\|_S$ désigne la norme de Schur), montrer que $\|E_{k+1}\|_S^2 = \|E_k\|_S^2 - 2|a_{p_k q_k}^{(k)}|^2$.
   (b) En déduire que
   $$\|E_k\|_S^2 \leq \left(1 - \frac{2}{(n^2-n)}\right)^{k-1} \|E_1\|_S^2,$$
   pour tout $k \geq 1$, et donc que E_k tend vers la matrice nulle quand $k \to +\infty$.
2. (a) Montrer que la suite (D_k) est bornée.
   (b) Soit $(D_{\varphi(k)})_k$ une suite extraite de $(D_k)_k$ convergeant vers D (forcément diagonale !).
      (i) Montrer que A et D ont même polynôme caractéristique puis qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que
      $$D = \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}.$$
      (ii) En déduire que la suite $(D_k)_k$ n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence.
   (c) Montrer que $D_{k+1} - D_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (d) Prouver finalement à l'aide de (a),(b)(ii) et (c) que $D_k \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} D$.

3.4 Sur la méthode de Givens-Householder

La méthode se décompose en deux phases principales : une phase de réduction à la forme tridiagonale (méthode de Householder) et une phase dite "de bissection" (méthode de Givens).

Tridiagonalisation d'une matrice symétrique (Householder).

1. Soit $w \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Vérifier que la matrice de Householder
   $$H_w^{(p)} = I - 2\frac{ww^T}{\|w\|^2},$$
   où $\|w\|$ désigne la norme euclidienne de w, est symétrique et orthogonale.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, on pose
   $$u_\mp = x \mp \|x\|e_1, \text{ où } x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i,$$
   la famille $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^p$. En remarquant que $\|u_\mp\|^2 = 2(\|x\|^2 \mp \|x\|x_1)$, montrer que $H_{u_\mp}^{(p)} x = \pm\|x\|e_1$.
3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, une matrice symétrique.

(a) Soient $c = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ et

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & H^{(n-1)}_{c\mp\|c\|e_1} & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A_1 = O_1^T A O_1$ est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \pm\|c\| & 0 & \dots & 0 \\ \pm\|c\| & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A' & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \text{avec } A' = (a'_{ij})_{1\le i,j\le n_1} = (A')^T \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

(b) Si $c' = (a'_{21}, a'_{31}, \dots, a'_{(n-1)1})^T \in \mathbb{R}^{n-2}$ et

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & H^{(n-2)}_{c'\mp\|c'\|e_1} & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

montrer que $(O_1O_2)^T A O_1 O_2$ est de la forme :

$$A_2 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & A'' & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} \text{avec } A'' = (A'')^T \in M_{n-2}(\mathbb{R}).$$

(c) En déduire qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $O^T A O$ est tridiagonale.

Méthode de bissection (Givens). Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on pose

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{i-2} & b_{i-1} & c_{i-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{i-1} & b_i \end{pmatrix}, \ b_i \in \mathbb{R},\ c_j \in \mathbb{R}^*, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

On définit ensuite les polynômes p_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, par les formules de récurrence :

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = b_1 - x \\ p_i(x) = (b_i - x)p_{i-1}(x) - c_{i-1}^2 p_{i-2}(x) \text{ si } 2 \le i \le n. \end{cases}$$

Démontrer que :

1. p_i est le polynôme caractéristique de la matrice B_i, $1 \le i \le n$.
2. $\lim_{x\to-\infty} p_i(x) = +\infty$, $1 \le i \le n$.
3. $p_i(t) = 0 \Longrightarrow p_{i-1}(t)p_{i+1}(t) < 0$, $1 \le i \le n-1$.
4. p_i a i racines réelles distinctes $x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_i^{(i)}$, $1 \le i \le n$.
5. $x_j^{(i+1)} < x_j^{(i)} < x_{j+1}^{(i+1)}$, $1 \le i, j \le n-1$.
6. Le nombre de racines de $p_i < \mu \in \mathbb{R}$ est le nombre de changements de signes dans la suite $(1, p_1(\mu), \ldots, p_i(\mu))$.

3.5 Sur la méthode de la puissance

Calcul de la valeur propre de module maximum. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \ge 1$, une matrice diagonalisable. On suppose que A possède une unique valeur propre de module maximal, notée λ_1 :

$$\forall \lambda \in \sigma(A),\ \lambda \ne \lambda_1 \Longrightarrow |\lambda| < \rho(A) = |\lambda_1|.$$

Pour tout $u_0 \notin \oplus_{\lambda\in\sigma(A)-\{\lambda_1\}} \ker(A - \lambda I)$, on définit la suite récurrente :

$$u_{k+1} = Au_k,\ k \ge 0.$$

1. On suppose pour commencer que λ_1 est simple.
   (a) Montrer que la suite $\left(\left(\frac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|}\right)^k \frac{u_k}{\|u_k\|}\right)_k$ converge vers un vecteur non nul de $\ker(A - \lambda_1 I)$.
   (b) Montrer pour tout w qui n'est pas orthogonal à la projection de u_0 sur $\ker(A - \lambda_1 I)$,
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{w^* A u_k}{w^* u_k} = \lambda_1.$$
2. Etendre les résultats du 1. au cas où λ_1 est une valeur propre multiple.

Méthode de la puissance inverse. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \ge 1$, une matrice diagonalisable, et $\delta \in \sigma(A)$. On choisit ensuite $\mathbb{C} \ni \mu \ne \delta$ tel que

$$|\mu - \delta| < d(\mu, \sigma(A) - \{\delta\}) = \min_{\lambda\in\sigma(A)-\{\delta\}} |\mu - \lambda|.$$

Pour un vecteur $u_0 \notin \oplus_{\lambda\in\sigma(A)-\{\delta\}} \ker(A - \lambda I)$, on définit ensuite la suite récurrente :

$$(A - \mu I)u_{k+1} = u_k,\ k \ge 0.$$

Expliquer pourquoi la suite $(u_k)_k$ est bien définie puis montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(\delta-\mu)^k}{|\delta-\mu|^k} \frac{u_k}{\|u_k\|} \in \ker(A - \delta I) - \{0\}.$$

3.6 Sur la méthode QR

Résultats préliminaires.

1. Montrer que toute matrice unitaire et triangulaire (supposée supérieure pour fixer les idées) est forcément de la forme $\mathrm{diag}(d_i)_{1\leq i\leq n}$ où $|d_i| = 1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. En déduire que si Q_1R_1 et Q_2R_2 désignent deux décompositions QR d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ $(n \geq 1)$, alors il existe $D = \mathrm{diag}(d_i)_{1\leq i\leq n}$ avec $|d_i| = 1$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, telle que
$$\begin{cases} Q_2 &= Q_1 D \\ R_2 &= D^{-1}R_1. \end{cases}$$
3. Montrer que la limite d'une suite matrices unitaires est unitaire.

Description de la méthode. A partir de $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit une suite de matrices $(A_k)_{k\geq 1}$ comme suit. Posant $A_1 = A$, le successeur A_{k+1} de A_k, $k \geq 1$, s'obtient en :

(i) Ecrivant la factorisation QR de A_k, $A_k = Q_kR_k$.

(ii) Formant ensuite la matrice $A_{k+1} = R_kQ_k$.

Pour tout $k \geq 1$, on vérifier que :

$$A_{k+1} = q_k^* A q_k \text{ et } A^k = q_k r_k \text{ où } q_k = Q_1Q_2 \ldots Q_k \text{ et } r_k = R_kR_{k-1} \ldots R_1.$$

Convergence de la méthode. On suppose que A est inversible et que toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, sont de modules différents :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n| > 0. \tag{2}$$

La matrice A est donc diagonalisable : il existe P inversible telle que $A = P\Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$. On suppose de plus que P^{-1} possède une factorisation LU : il existe L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure telles que :

$$P^{-1} = LU, \text{ avec } (L)_{ii} = 1, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

On va démontrer que

$$\begin{cases} (A_k)_{ii} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i, & 1 \leq i \leq n \\ (A_k)_{ij} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0, & 1 \leq j < i \leq n. \end{cases} \tag{4}$$

1. Montrer à partir de (2) que $\Lambda^k L \Lambda^{-k} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} I$.
2. Posant $E_k = \Lambda^k L\Lambda^{-k} - I$ et notant $P = QR$ l'unique factorisation QR de P telle que $(R)_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, déduire de ce qui précède qu'il existe $k_0 \geq 1$ tel que $I + RE_kR^{-1}$ est inversible pour tout $k \geq k_0$.
3. *Deuxième décomposition QR de A^k.*
Pour $k \geq k_0$, on note $\tilde{Q}_k\tilde{R}_k$ l'unique décomposition QR de $I + RE_kR^{-1}$ telle que $(\tilde{R}_k)_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.
   (a) En utilisant (3), montrer que $A^k = (Q\tilde{Q}_k)(\tilde{R}_kR\Lambda^kU)$ pour tout $k \geq k_0$.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice D_k diagonale vérifiant $|(D_k)_{ii}| = 1$, telle que $q_k = Q\tilde{Q}_kD_k$ et $r_k = D_k^{-1}\tilde{R}_kR\Lambda^kU$.

4. *Comportement asymptotique de $(\tilde{Q}_k)_k$ et $(\tilde{R}_k)_k$.*
   (a) On va montrer que la suite $(\tilde{Q}_k)_k$ a I pour unique valeur d'adhérence.
      (i) Justifier l'existence d'une sous-suite $(\tilde{Q}_{\varphi(k)})_k$ de $(\tilde{Q}_k)_k$ qui converge (et dont la limite sera notée $\tilde{Q}$).
      (ii) Montrer que $(\tilde{R}_{\varphi(k)})_k$ converge vers une matrice triangulaire $\tilde{R}$.
      (iii) Montrer alors que $\tilde{Q} = \tilde{R} = I$.
      (iv) Conclure.
   (b) En déduire que $\tilde{R}_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} I$ et $\tilde{Q}_k \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} I$.
5. Montrer pour tout $k \geq 1$ que $A_{k+1} = D_k^* \Omega_k D_k$ où $\Omega_k = \tilde{Q}_k^* R \Lambda R^{-1} \tilde{Q}_k$.
6. Démontrer enfin les relations de (4).

3.7 Rappels sur la factorisation QR d'une matrice

Préliminaire : matrices de Householder. A tout vecteur $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ on associe la *matrice de Householder* :

$$H(v) = I - 2\frac{vv^*}{v^*v} = I - \frac{2}{\|v\|^2} vv^*,$$

où $\|v\| = \|v\|_2$ est la norme hermitienne de v.

(a) Vérifier que $H(v)$ est hermitienne et unitaire.

(b) Etant donné $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ (la famille $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ désignant la base canonique de $\mathbb{C}^n$) tel que $x_1 = e^{i\theta}|x_1| \neq 0$ et $\sum_{i=2}^n |x_i| > 0$, vérifier que

$$H(x \mp \|x\| e^{i\theta} e_1) x = \pm \|x\| e^{i\theta} e_1.$$

Principe de la méthode. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$. L'idée est de trouver $n-1$ matrices de Householder $H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$ telle que $H_{n-1} \ldots H_2 H_1 A$ soit triangulaire supérieure.

Construction de H_1. La matrice H_1 doit permettre de "faire apparaître des zéros" à la place des $n-1$ dernières composantes de la première colonne $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}) \in \mathbb{C}^n$ de la matrice A :

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

(a) Si $\sum_{i=2}^n |a_{i1}| > 0$, alors il existe $w_1 \in \mathbb{C}^n$ tel que $H_{w_1}^{(n)} a_1$ a toutes ses composantes nulles à l'exception de la première. Ainsi $H_1 = H_{w_1}^{(n)}$ convient.

(b) Si $\sum_{i=2}^n |a_{i1}| = 0$, alors il suffit de choisir $H_1 = I_n$.

Construction de H_2. Soit $a_2 = (a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, \cdots, a_{n2}^{(2)})$ le vecteur de $\mathbb{C}^{n-1}$ formé par les $n-1$ dernières composantes de la deuxième colonne de A_2.

(a) Si $\sum_{i=3}^{n} |a_{i2}^{(2)}| > 0$, il existe $\tilde{w}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $H_{\tilde{w}_2}^{(n-1)} a_2$ a toutes ses composantes nulles à l'exception de la première. On pose alors :

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{\tilde{w}_2}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

En notant w_2 le vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont la première composante est nulle et les $n-1$ dernières sont celles de $\tilde{w}_2$, vérifier que :

$$H_2 = H_{w_2}^{(n)}.$$

(b) Si $\sum_{i=3}^{n} |a_{i2}^{(2)}| = 0$, on pose $H_2 = I_n$.

Vérifier que dans les deux cas, on obtient :

$$A_3 = H_2 A_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Décrire ensuite l'étape k, $k \geq 3$ de cette méthode.

Décomposition QR. Montrer que :

1. Il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire R telles que $A = QR$.
2. On peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de R soient tous ≥ 0.
3. Si A est inversible, la factorisation QR est unique.
   Indication : pour cette question, on rappelle (factorisation de Cholesky) que toute matrice à coefficients complexes H, hermitienne définie positive se met sous la forme

   $$H = TT^*, \text{ où } T \text{ est une matrice triangulaire.}$$

   De plus, on peut s'arranger pour que les coefficients diagonaux de T soient tous > 0, auquel cas la matrice T est unique.