Introduction à l'analyse numérique des problèmes aux limites elliptiques

Eric Soccorsi

Avertissement

Ce manuscrit est une version encore provisoire et incomplète des notes du cours d'analyse numérique du Master 1 "Mathématiques et Applications" de Marseille.

Table des matières

Afin de simplifier l'exposé, toutes les fonctions de ce manuscrit sont supposées à valeurs réelles, le passage au cas de fonctions à valeurs complexes ne posant aucune difficulté.

1 Le minimum à connaître sur les distributions

Pour une présentation rapide et assez complète des éléments principaux concernant la théorie des distributions, voir [5].
Dans cette section Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

1.1 Fonctions test

1.1.1 Définition

Définition. L'espace des fonctions test sur Ω, noté $D(\Omega)$ (parfois aussi noté $\mathrm{C}_0^\infty(\Omega)$ dans la littérature mathématique) est l'ensemble fonctions de classe $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ à support compact

$$D(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) \text{ et } \operatorname{supp}(f) \text{ est compact}\},$$

avec $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$.
Il est clair que $D(\Omega)$ est stable par dérivation.

Exemple. Si $N = 1$ et $\Omega = (-2, 2)$ alors

$$\varphi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est une fonction test sur Ω. On peut facilement construire une fonction non nulle de $D(\Omega)$ pour $N \geq 2$ à partir de cet exemple.

Notation. Pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ et tout multi-indice $p = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathbb{N}^N$, on pose :

$$\partial^p \varphi = \frac{\partial^{|p|}\varphi}{\partial^{p_1} x_1 \ldots \partial^{p_N} x_N}, \text{ où } |p| = p_1 + \ldots + p_N.$$

Comme déjà mentionné plus haut, il est évident que $\partial^p \varphi \in D(\Omega)$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ et tout $p \in \mathbb{N}^N$.

1.1.2 Notion de convergence dans $D(\Omega)$

Une suite $(\varphi_m)_m$ de fonctions de $D(\Omega)$ converge vers $\varphi \in D(\Omega)$ s'il existe un compact $K \subset \Omega$ satisfaisant simultanément :

(a) $\operatorname{supp}(\varphi_m - \varphi) \subset K$ pour tout m ;

(b) $\lim_{m \to +\infty} \|\partial^p(\varphi_m - \varphi)\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^N$.

Il est facile de voir que si $(\varphi_m)_m$ converge vers φ dans $D(\Omega)$, alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^N$, $(\partial^p \varphi_m)_m$ converge vers $\partial^p \varphi$ dans $D(\Omega)$.

1.2 L'espace des distributions sur Ω

1.2.1 Définition

Définition. L'espace des distributions sur Ω est l'espace dual $D'(\Omega)$ de $D(\Omega)$ muni de la notion de convergence définie ci-dessus. C'est donc l'ensemble des [1]formes linéaires continues sur $D(\Omega)$, en ce sens que chaque $T \in D'(\Omega)$ vérifie $\lim_{m\to+\infty} T(\varphi_m) = T(\varphi)$ pour toute suite $(\varphi_m)_m$ convergeant vers φ dans $D(\Omega)$.

Notation. Dans la suite, $\langle .,. \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}$ (ou plus simplement $\langle .,. \rangle$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible) désignant le produit de dualité entre $D(\Omega)$ et $D'(\Omega)$, on note

$$\langle T, \varphi \rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = T(\varphi),\ T \in D'(\Omega),\ \varphi \in D(\Omega).$$

Exemple. Pour tout point $a \in \Omega$, la distribution de Dirac au point a, notée δ_a, est définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a),\ \varphi \in D(\Omega).$$

Vérifions que $\delta_a \in D'(\Omega)$. Le fait que δ_a soit une forme linéaire sur $D(\Omega)$ étant évident, il suffit de montrer que $\lim_{m\to+\infty}\langle \delta_a, \varphi_m \rangle = \langle \delta_a, \varphi \rangle$ pour toute suite $(\varphi_m)_m$ convergeant vers φ dans $D(\Omega)$. En fait, K désignant un sous-ensemble compact de Ω contenant $\text{supp}(\varphi_m - \varphi)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on voit facilement que

$$|\langle \delta_a, \varphi_m \rangle - \langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi_m(a) - \varphi(a)| \le \|\varphi_m - \varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(K)} \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui prouve la continuité et garantit le résultat.

1.2.2 Convergence dans $D'(\Omega)$

On dit que la suite $(T_m)_m$ de distributions sur Ω converge vers T dans $D'(\Omega)$, si elle satisfait la condition suivante :

$$\lim_{m\to+\infty} \langle T_m, \varphi \rangle_{D(\Omega)',D(\Omega)} = \langle T_m, \varphi \rangle_{D(\Omega)',D(\Omega)},\ \varphi \in D(\Omega).$$

1.2.3 Distributions régulières

Fonctions de carré intégrable. L'espace $\mathrm{L}^2(\Omega)$ des fonctions de carré integrable sur Ω, relativement à la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 \dots dx_n$ dans $\mathbb{R}^N$,

$$\mathrm{L}^2(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } \int_\Omega |f(x)|^2 dx < \infty\},$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{0,\Omega} = \int_\Omega f(x)g(x)dx,\ f, g \in \mathrm{L}^2(\Omega).$$

On rappelle que deux fonctions f et g coïncident dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ si et seulement elles ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle :

$$\begin{aligned} f = g \text{ dans } \mathrm{L}^2(\Omega) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists N_0 \subset \Omega,\ \text{mes}(N_0) = 0,\ f(x) - g(x) = 0, \forall x \in \Omega \backslash N_0. \end{aligned}$$

1. Autrement dit l'ensemble des applications linéaires de $D(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{L}(D(\Omega), \mathbb{R})$.

Distribution $\mathrm{L}^2(\Omega)$-régulière. A tout $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ on associe l'application linéaire $T_f : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx.$$

Remarquons pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ que $f\varphi \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ car [2] $\varphi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, et donc que $T_f(\varphi)$ est bien définie.
De plus, $T_f \in D'(\Omega)$. Pour le voir, il suffit de vérifier que T_f est continue. Or, pour toute suite $(\varphi_m)_m$ de fonctions test sur Ω convergeant vers φ dans $D(\Omega)$, on a

$$|T_f(\varphi_m) - T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|\varphi_m - \varphi\|_{0,\Omega}, \tag{1}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec

$$\|\varphi_m - \varphi\|_{0,\Omega} = \|\varphi_m - \varphi\|_{0,K} \leq \mathrm{mes}(K)^{1/2}\|\varphi_m - \varphi\|_{\mathrm{L}^\infty(K)}, \tag{2}$$

K désignant un sous-ensemble compact de Ω tel que $\mathrm{supp}(\varphi - \varphi_m) \subset K$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. La continuité s'ensuit donc de (1)-(2).
T_f s'appelle la distribution $\mathrm{L}^2(\Omega)$-régulière associée à f.

Proposition 1. *L'application $f \mapsto T_f$, de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$, est linéaire, injective et continue.*

Démonstration.
Seules l'injectivité et la continuité méritent d'être démontrées. Pour la continuité on considère $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ vérifiant $T_f = 0$ dans $D'(\Omega)$, i.e. $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. Considérons ensuite une suite $(\varphi_m)_m$ de $D(\Omega)$ [3]satisfaisant

$$\lim_{m\to+\infty} \|\varphi_m - f\|_{0,\Omega} = 0.$$

Alors, en prenant la limite $m \to +\infty$ dans l'égalité $\int_\Omega f(x)\varphi_m(x)dx = 0$, on trouve que $\|f\|_{0,\Omega} = 0$. Ensuite, pour vérifier la continuité, il suffit de considérer une suite $(f_m)_m$ convergeant vers f dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, puis d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à

$$|\langle T_{f_m}, \varphi\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| = \int_\Omega (f_m - f)(x)\varphi(x)dx \leq \|f_m - f\|_{0,\Omega}\|\varphi\|_{0,\Omega},\ m \in \mathbb{N},\ \varphi \in D(\Omega),$$

et enfin de faire tendre m vers l'infini. □
La Proposition 1 permettant d'identifier $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ à $T_f \in D'(\Omega)$, on identifie $\mathrm{L}^2(\Omega)$ à un sous-espace de $D'(\Omega)$, ce qui explique que l'on écrive $\mathrm{L}^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$.
En fait $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est un sous-ensemble strict de $D'(\Omega)$ car il existe des distributions T qui ne sont pas régulières, i.e. pour lesquelles il n'existe aucune fonction f de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ telle que $T = T_f$. C'est le cas par exemple (voir le §1.4.1-Ex2) pour δ_a, $a \in \Omega$.

---

2. En fait, comme $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et que $K = \mathrm{supp}\ \varphi$ est un sous-ensemble compact de Ω, on a même $\varphi \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ pour tout $p \in [0, +\infty]$ puisque $\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi(x)|^p dx \leq \mathrm{mes}(K)\|\varphi\|^p_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} < \infty$.
3. $D(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Distribution $L^1_{loc}(\Omega)$-régulière. $L^1_{loc}(\Omega)$ désignant l'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω, i.e. l'ensemble des fonctions intégrables sur tout compact K de Ω,

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ tel que } \int_K |f(x)|dx < \infty,\ \forall K \subset \Omega,\ \text{compact.}\},$$

il est facile de voir que l'on peut étendre la définition précédente de T_f à tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, et que dans ce cas $T_f \in D'(\Omega)$. L'application $f \mapsto T_f$ est alors linéaire, continue et [4]injective de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$, ce qui permet d'indentifier $L^1_{loc}(\Omega)$ à un sous-espace de $D'(\Omega)$. On parle alors de distribution $L^1_{loc}(\Omega)$-régulière associée à f.

1.3 Dérivation au sens des distributions

1.3.1 Définition

Etant donné $T \in D'(\Omega)$, on définit la dérivée partielle $\partial_{x_i} T$ de T par rapport à x_i, $i = 1, \ldots, N$, par l'égalité :

$$\langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} = -\langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)},\ \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Comme $(\partial_{x_i} \varphi_m)_m$ converge vers $\partial_{x_i} \varphi$ dans $D(\Omega)$ dès que la suite $(\varphi_m)_m$ converge vers φ dans $D(\Omega)$, on vérifie aisément que $\partial_{x_i} T \in D'(\Omega)$. Ainsi, pour chaque $i = 1, \ldots, N$, toute distribution T sur Ω admet une dérivée partielle $\partial_{x_i} T$ par rapport à x_i, qui est elle même une distribution sur Ω.

Exemples. On se place dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}$ et on considère la fonction de Heavyside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Comme $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, T_H est bien définie dans $D'(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R})$, on a

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx.$$

En tenant compte du fait que $\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$ (car le support de φ est compact), et que φ est continue en $x = 0$, il vient immédiatement

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = 2\varphi(0) = 2\langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

ce qui montre que $(T_H)' = 2\delta_0$.

4. En effet, pour tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on a, en vertu de [1][Théorème 4.4.1], l'équivalence suivante :

$$(f(x) = 0 \text{ p.p. } x \in \Omega) \Longleftrightarrow \left(\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0,\ \forall \varphi \in D(\Omega). \right).$$

1.3.2 Lien avec la dérivation usuelle

Supposons que $\Omega = \mathbb{R}$ et que $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$. Ainsi $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, ce qui permet de définir T_f comme ci-dessus. Afin d'examiner le lien existant entre la dérivée usuelle (i.e. la dérivée prise au sens classique) f' de f et $(T_f)'$, il suffit d'intégrer par parties dans

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi'(t)dt = -\int_{\mathbb{R}} f'(t)\varphi dt,\ \forall \varphi \in D(\mathbb{R}),$$

les dérivées précédentes étant prises au sens classique, puis de réécrire cette égalité sous la forme équivalente suivante :

$$\langle (T_f)', \varphi\rangle_{D'(\mathbb{R}),D(\mathbb{R})} = \langle T_{f'}, \varphi\rangle_{D'(\mathbb{R}),D(\mathbb{R})},\ \forall \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

On obtient ainsi que $(T_f)' = T_{f'}$, ce qui montre que la notion de dérivée distributionnelle (encore appelée dérivée au sens faible) généralise la notion de dérivée au sens classique (encore appelée dérivée au sens fort).

1.3.3 Généralisation

Il résulte de ce qui précède que toute distribution T sur Ω est indéfiniment dérivable dans $D'(\Omega)$, avec

$$\langle \partial^p T, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = (-1)^{|p|}\langle T, \partial_{x_i}\varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)},\ \varphi \in D(\Omega),\ p \in \mathbb{N}^N.$$

Proposition 2. *Pour tout $p \in \mathbb{N}^N$, l'application $T \mapsto \partial^p T$ est linéaire et continue dans $D'(\Omega)$.*

Démonstration.
La continuité méritant seule d'être démontrée, on se donne une suite $(T_m)_m$ de distributions sur Ω qui converge vers T dans $D'(\Omega)$, puis l'on vérifie facilement pour tout $\varphi \in D(\Omega)$ et tout $p \in \mathbb{N}^N$ que

$$\lim_{m\to+\infty}\langle \partial^p T_m, \varphi\rangle = (-1)^{|p|}\lim_{m\to+\infty}\langle T_m, \partial^p\varphi\rangle = (-1)^p\langle T, \partial^p\varphi\rangle = \langle \partial^p T, \varphi\rangle,$$

car $\partial^p\varphi \in D(\Omega)$, ce qui garantit le résultat. □

1.4 Exercices sur les distributions

1.4.1 Enoncés

Ex1. Soient I un sous-intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\theta_0 \in D(I)$ telle que $\int_I \theta_0(x)dx = 1$.

1) Montrer pour tout $\varphi \in D(I)$ qu'il existe un unique couple $(\lambda, \psi) \in \mathbb{R} \times D(I)$ tel que $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi'$.
2) En déduire que si $T \in D'(I)$ vérifie $T' = 0$ alors T est constante (i.e. il existe une fonction constante f telle que $T = T_f$).
3) Déduire de 2) que :
   a) Si $T' \in \mathrm{C}^\infty(I)$ (i.e. s'il existe une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$ telle que $T' = T_f$) alors $T \in \mathrm{C}^\infty(I)$.
   b) Si $T \in D'(I)$ vérifie $T^{(k)} = 0$ dans $D'(I)$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, alors T est un polynôme de degré au plus $k-1$ (i.e. il existe $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que $T = T_P$).

Ex2. Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$.

1) Montrer l'équivalence suivante :

$$T \in D'(\Omega) \text{ est } \mathrm{L}^2(\Omega) - \text{régulière} \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \quad \sup_{\varphi \in D(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\langle T, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)}}{\|\varphi\|_{0,\Omega}} \leq C.$$

2) En déduire que δ_0 n'est pas une distribution $\mathrm{L}^2(\Omega)$-régulière.

Ex3. Calculer la dérivée distribution de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$.

Ex4. Soient I un intervalle ouvert (mais pas forcément borné) de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(I)$. Pour tout $\varphi \in D(I)$, on pose $T_f(\varphi) = \int_I f(x)\varphi(x)dx$.

1) Montrer que $T_f \in D'(I)$.
2) Vérifier ensuite que l'application $f \to T_f$ est bien linéaire, continue et injective de $\mathrm{L}^1_{loc}(I)$ dans $D'(I)$.

1.4.2 Solution de l'Ex1

1) Remarquons pour commencer que si une telle décomposition existe elle impose nécessairement $\lambda = \int_I \varphi(x)dx$ (car $\int_I \psi'(x)dx = 0$). De plus si $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi_1' = \lambda\theta_0 + \psi_2'$ pour ψ_1 et ψ_2 dans $D(I)$ alors on a $(\psi_2 - \psi_1)'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, et $\psi_2 - \psi_1$ est donc constante sur I (car I est un intervalle). Ensuite, comme $\psi_2 - \psi_1$ est à support compact dans I, la constante en question ne peut être que 0. Ceci montre que $\psi_1 = \psi_2$ et prouve l'unicité de la décomposition. Donnons-nous ensuite $a, b \in I$ tels que supp $\theta_0 \subset [a, b]$ et supp $\varphi \subset [a, b]$. On définit alors $\psi(x) = \int_a^x (\varphi(t) - \lambda\theta_0(t))dt$ pour tout $x \in I$ de sorte que $\psi \in \mathrm{C}^\infty(I)$ vérifie bien $\psi' = \varphi - \lambda\theta_0$ sur I. Reste à montrer que le support de cette fonction est compact dans I. Pour cela on va vérifier que $\psi(x) = 0$ pour $x \leq a$ et $x \geq b$. Dans le cas $x \leq a$ le résultat est immédiat car $x \leq \inf \mathrm{supp}\ \varphi$ et $x \leq \inf \mathrm{supp}\ \theta_0$. Enfin pour $x \geq b$ il suffit de voir que $\psi(x) = \int_I \varphi(t)dt - \lambda = 0$ par définition de λ.
2) Pour tout $\varphi = \lambda\theta_0 + \psi \in D(I)$ on a $\langle T, \varphi\rangle = \lambda\langle T, \theta_0\rangle + \langle T, \psi'\rangle$, avec $\langle T, \psi'\rangle = -\langle T', \psi\rangle = 0$ car $T' = 0$ dans $D'(I)$. Par suite $\langle T, \varphi\rangle = c \int_I \varphi(x)dx$ pour tout $\varphi \in D(I)$, où l'on a posé $c = \langle T, \theta_0\rangle$. Cela montre que T est la distribution régulière associée à la fonction constante c.
3) a) Etant donné $x_0 \in I$, on pose $g_0(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ pour tout $x \in I$, la fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(I)$ satisfaisant $T' = T_f$. Il est donc clair que $g_0 \in \mathrm{C}^\infty(I)$ et que $g_0'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. De plus, pour tout $\varphi \in D(I)$, on a

$$\langle T_{g_0}', \varphi\rangle_{D'(I),D(I)} = -\langle T_{g_0}, \varphi'\rangle_{D'(I),D(I)} = -\int_I g_0(x)\varphi'(x)dx = \int_I g_0'(x)\varphi(x)dx,$$

en intégrant par parties (ce qui est licite puisque g_0 et φ sont toutes deux de classe C^1 sur I) et en tenant compte du fait que le support de φ est un compact de I. Par suite, pour chaque $\varphi \in D(I)$ on a obtenu que

$$\langle T_{g_0}', \varphi\rangle_{D'(I),D(I)} = \int_I f(x)\varphi(x)dx = \langle T_f, \varphi\rangle_{D'(I),D(I)} = \langle T', \varphi\rangle_{D'(I),D(I)},$$

ce qui montre que $T'_{g_0} = T'$ dans $D'(I)$. Ainsi $(T - T_{g_0})' = 0$ dans $D'(I)$ donc il existe une constante c telle que $T = T_{g_0} + T_c = T_{g_0+c}$ d'après 2), ce qui établit bien que $T = T_g$ avec $g = g_0 + c \in \mathrm{C}^\infty(I)$.

b) On raisonne par récurrence sur $k \in N^*$. Le cas $k = 1$ étant traité par 2), supposons que le résultat soit vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons alors qu'il reste vrai pour l'indice $k + 1$. En fait, si $T^{(k+1)} = 0$ alors la dérivée distribution d'ordre k de T' est nulle, car pour tout $\varphi \in D(I)$ on a

$$\begin{aligned} \langle T^{(k+1)}, \varphi \rangle_{D'(I),D(I)} &= (-1)^{k+1} \langle T, \varphi^{(k+1)} \rangle_{D'(I),D(I)} \\ &= (-1)^{k+1} \langle T, \frac{d}{dx} \varphi^{(k)} \rangle_{D'(I),D(I)} \\ &= (-1)^k \langle T', \varphi^{(k)} \rangle_{D'(I),D(I)} \\ &= \langle \frac{d^k}{dx^k} T', \varphi \rangle_{D'(I),D(I)}. \end{aligned}$$

Par suite T' est une distribution régulière associée à un polynôme $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ par hypothèse de récurrence, i.e. $T' = T_P$. Or $T_P = T'_{Q_0}$ où $Q_0 \in \mathbb{R}_k[X]$ est défini par l'égalité $Q_0(x) = \int_0^x P(t)dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $(T - T_{Q_0})' = 0$ dans $D'(I)$. D'après 2) il existe donc une constante c pour laquelle $T = T_Q$ avec $Q = Q_0 + c \in \mathbb{R}_k[X]$.

2 Problèmes aux limites en dimension 1

Pour un exposé élémentaire et (bien) plus complet concernant les notions d'analyse fonctionnelle exposées dans la suite de cette partie se reporter à [2, 6].

2.1 Motivation

Soient $a < b$ deux réels et $I = (a, b)$. Etant donnés $c, f \in \mathrm{C}^0(\overline{I})$, on veut trouver u solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \;\; x \in I & (3) \\ u(a) = u(b) = 0. & (4) \end{cases}$$

2.1.1 Solution forte

Une *solution forte* (ou classique) de (3)-(4) est une fonction $u \in \mathrm{C}^2(\overline{I})$ vérifiant (3) et (4) simultanément.

2.1.2 Solution faible

En multipliant (3) par $\varphi(x)$, $\varphi \in D(I)$, puis en intégrant par rapport à x sur I, il vient

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)dx + \int_I c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \;\; \varphi \in D(I). \tag{5}$$

Si $c, f \in \mathrm{L}^\infty(I)$ il est clair que (5) a un sens dès que $u, u' \in \mathrm{L}^2(I)$ (la dérivation étant prise au sens des distributions). Toute fonction $u \in \mathrm{L}^2(I)$ telle que $u' \in \mathrm{L}^2(I)$ et qui vérifie (5) est appelée *solution faible* de (3)-(4).

2.1.3 Lien entre solutions forte et faible

Il résulte facilement de ce qui précède que toute solution forte de (3)-(4) est solution faible de (3)-(4). Réciproquement si u est solution faible de (3)-(4) telle que $u \in \mathrm{C}^2(\overline{I})$ avec $u(a) = u(b) = 0$, et que $c \in \mathrm{C}^0(\overline{I})$, alors u est solution forte de (3)-(4). En effet, si u est solution faible de (3)-(4) alors elle vérifie $-u'' + cu = f$ dans $D'(I)$. Or $f \in \mathrm{L}^2(I)$ donc cette égalité a lieu dans $\mathrm{L}^2(I)$, ce qui entraîne que $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in I$. Comme $c \in \mathrm{C}^0(\overline{I})$ et $u \in \mathrm{C}^2(\overline{I})$, le membre de gauche de l'égalité est continu sur $\overline{I}$, et donc $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$, ce qui prouve le résultat.

2.2 L'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(I)$

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $I = (a, b)$.

2.2.1 Définition

Le premier espace de Sobolev sur I, noté $\mathrm{H}^1(I)$, est l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I dont la dérivée (au sens des distributions) est une distribution régulière associée à une fonction de carré intégrable :

$$\mathrm{H}^1(I) = \{u \in \mathrm{L}^2(I),\ \exists f \in \mathrm{L}^2(I),\ (T_u)' = T_f\} = \{u \in \mathrm{L}^2(I), u' \in \mathrm{L}^2(I)\},$$

en convenant de noter u' à la place de $(T_u)'$, ce qui sera systématiquement le cas dans la suite.

Théorème 3. $\mathrm{H}^1(I)$ *est un espace de Hilbert*[5] *séparable pour le produit scalaire*

$$(u,v)_{1,I} = (u,v)_{0,I} + (u',v')_{0,I} = \int_a^b (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))dx,\ u,v \in \mathrm{H}^1(I).$$

Démonstration.
Soit $(v_m)_m$ une de Cauchy dans $\mathrm{H}^1(I)$. Alors $(v_m)_m$ et $(v'_m)_m$ sont deux suites de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(I)$[6] donc il existe v, w dans $\mathrm{L}^2(I)$ tels que $\lim_{m\to+\infty} v_m = v$ et $\lim_{m\to+\infty} v'_m = w$ dans $\mathrm{L}^2(I)$. Or $\mathrm{L}^2(I) \hookrightarrow D'(I)$ est continue (d'après la Proposition 1), donc la convergence a lieu dans $D'(I)$. Comme la dérivation est continue dans $D'(I)$ (d'après la Proposition 2) cela entraîne que $\lim_{m\to+\infty} v'_m = v'$ dans $D'(I)$. Ainsi $w = v'$ par unicité de la limite. Par suite $v \in \mathrm{H}^1(I)$ et $\lim_{m\to+\infty} v_m = v$ dans $\mathrm{H}^1(I)$, ce qui prouve que $\mathrm{H}^1(I)$ est complet. La séparabilité s'obtient en considérant l'isométrie $J : \mathrm{H}^1(I) \ni v \mapsto (v,v') \in \mathrm{L}^2(I) \times \mathrm{L}^2(I)$, qui permet d'identifier $\mathrm{H}^1(I)$ au sous-espace fermé $J(\mathrm{H}^1(I))$ de $\mathrm{L}^2(I) \times \mathrm{L}^2(I)$. Or $\mathrm{L}^2(I) \times \mathrm{L}^2(I)$ est séparable[7] car $\mathrm{L}^2(I)$ l'est, donc $\mathrm{H}^1(I)$ est[8] séparable. $\square$
Avant d'examiner les propriétés des fonctions de classe H^1 sur un intervalle, commençons par démontrer le résultat utile suivant :

Lemme 4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une suite $(u_m)_m \in H^1(I)$. S'il existe deux fonctions u et v dans $L^2(I)$ pour lesquelles*

$$\lim_{m\to+\infty} \|u_m - u\|_{0,I} = \lim_{m\to+\infty} \|u'_m - v\|_{0,I} = 0,$$

alors $u \in H^1(I)$ et $\lim_{m\to+\infty} \|u_m - u\|_{1,I} = 0$ (ce qui implique donc que $u' = v$).

Démonstration.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in D(I)$ on a simultanément $\langle u'_m, \varphi\rangle = \int_I u'_m(x)\varphi(x)dx$ et $\langle u'_m, \varphi\rangle = -\langle u_m, \varphi'\rangle = -\int_I u_m(x)\varphi'(x)dx$, de sorte que

$$\int_I u'_m(x)\varphi(x)dx = -\int_I u_m(x)\varphi'(x)dx.$$

En faisant tendre m vers l'infini dans les deux membres de l'égalité précédente, il vient donc

$$\int_I v(x)\varphi(x)dx = -\int_I u(x)\varphi'(x)dx,\ \varphi \in D(I).$$

Par suite, $\langle v, \varphi\rangle = \langle u', \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in D(I)$, ce qui établit que $v' = u$ dans $D'(I)$. Comme $u \in L^2(I)$, cette identité a lieu dans $L^2(I)$, ce qui prouve le résultat. $\square$

5. Il existe une partie dénombrable dense dans $\mathrm{H}^1(I)$.
6. On rappelle que $\mathrm{L}^2(I)$ est complet pour le p.s. $(.,.)_{0,I}$.
7. Un produit d'espaces séparables est séparable.
8. Tout sous-ensemble fermé d'un espace séparable est séparable.

2.2.2 Continuité

Afin de prouver la Proposition 6, commençons par démontrer le

Lemme 5. *Soient $x_0 \in I$ et $f \in \mathrm{L}^2(I)$. Alors $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ est continue sur $\overline{I}$ et $F' = f$ dans $D'(I)$.*

Démonstration.
Pour tout $x, y \in \overline{I}$ on a $|F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \leq \|f\|_{0,I}|x-y|^{1/2}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui montre que F est bien continue (elle est même 1/ 2-höldérienne) sur $\overline{I}$. Ainsi $F \in \mathrm{L}^1_{loc}(I)$ et donc $\langle F, \varphi\rangle_{D'(I),D(I)} = \int_a^b F(x)\varphi(x)dx$ pour tout $\varphi \in D(I)$, ce qui entraîne $\langle F', \varphi\rangle_{D'(I),D(I)} = -\langle F, \varphi'\rangle_{D'(I),D(I)} = -\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx$. Par suite,

$$\begin{aligned}\langle F', \varphi\rangle_{D'(I),D(I)} &= -\int_a^b \int_{x_0}^x f(t)\varphi'(x)dtdx \\ &= \int_a^{x_0}\int_x^{x_0} f(t)\varphi'(x)dtdx - \int_{x_0}^b \int_{x_0}^x f(t)\varphi'(x)dtdx \\ &= \int_a^{x_0} f(t)\left(\int_a^t \varphi'(x)dx\right)dt - \int_{x_0}^b f(t)\left(\int_t^b \varphi'(x)dx\right)dt, \quad (6)\end{aligned}$$

pour chaque $\varphi \in D(I)$. La première intégrale du membre de droite de (6) s'obtient en utilisant le fait que $(t,x) \mapsto \psi(t,x) = f(t)\varphi'(x)$ est intégrable sur $\Delta_- = \{(x,t) \in [a,x_0]\times\overline{I},\ x \leq t \leq x_0\}$. Pour le voir il suffit de remarquer pour presque tout $x \in [a, x_0]$ que $\int_x^{x_0}|f(t)|dt \leq \|f\|_{0,I}(x_0 - x)^{1/2}$, puis que $\int_a^{x_0}(x_0-x)^{1/2}|\varphi'(x)|dx < \infty$ car le support de φ est compact. Le théorème de Tonelli garantit alors que $\psi \in \mathrm{L}^1(\Delta_-)$, ce qui permet ensuite d'écrire $\int_a^{x_0}\int_x^{x_0}\psi(t,x)dtdx = \int_a^{x_0} f(t)\left(\int_a^t \varphi'(x)dx\right)dt$ grâce au théorème de Fubini. La seconde intégrale s'obtient en procédant de la même façon sur $\Delta_+ = \{(x,t) \in [x_0,b]\times\overline{I},\ x_0 \leq t \leq x\}$. Ainsi, en tenant compte du fait que φ s'annule aux extrémités de I, il s'ensuit de (6) que

$$\langle F', \varphi\rangle_{D'(I),D(I)} = \int_a^{x_0} f(t)\varphi(t)dt + \int_{x_0}^b f(t)\varphi(t)dt = \langle f, \varphi\rangle_{D'(I),D(I)},\ \varphi \in D(I),$$

ce qui achève la démonstration. □
Venons-en maintenant au résultat principal de ce paragraphe.

Proposition 6. *Pour tout $u \in \mathrm{H}^1(I)$ il existe un unique $\tilde{u} \in \mathrm{C}^0(\overline{I})$ satisfaisant :*

$$u(x) = \tilde{u}(x) \text{ p.p. } x \in I,\ \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) = \int_x^y u'(t)dt,\ \forall x, y \in \overline{I}.$$

Démonstration.
Soit $x_0 \in I$. Alors $U(x) = \int_{x_0}^x u'(t)dt \in \mathrm{C}^0(\overline{I})$ d'après le Lemme 5, et $(u-U)' = u' - U' = 0$ dans $D'(I)$. Par suite, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $u - U = c$ dans $D'(I)$. (voir le §1.4.1, Ex2, 2)). Ainsi $u = U + c$ dans $\mathrm{L}^2(I)$ ce qui entraîne $u(x) = U(x) + c$ pour presque tout $x \in I$. Comme $U + c$ est continue sur $\overline{I}$, l'égalité a lieu pour tout $x \in \overline{I}$ donc $\tilde{u} = U + c$ convient. □

Corollaire 7. $\mathrm{H}^1(I) \subset \mathrm{C}^0(\overline{I})$.

2.2.3 Un résultat de densité

Commençons par examiner le cas où $I = \mathbb{R}$ (i.e. $a = -\infty$ et $b = +\infty$).

Proposition 8. *$D(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration.
On procède par troncature puis régularisation.

a) Troncature. Soit $\zeta \in D(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{cases} \zeta(x) = 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 < \zeta(x) < 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ \zeta(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Pour tout $R > 0$, on pose ensuite $\zeta_R(x) = \zeta(x/R)$. Si $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ alors $\zeta_R v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ (voir le §2.6.1-Ex1) et son support est compact. De plus

$$\|\zeta_R v - v\|_{0,\mathbb{R}}^2 = \int_{|x|\geq R} v(x)^2 dx \overset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme $(\zeta_R v)' = \zeta_R' v + \zeta_R v'$ (voir le §2.6.1-Ex1), on a $\|(\zeta_R v)' - v'\|_{0,\mathbb{R}} \leq \|\zeta_R v' - v'\|_{0,\mathbb{R}} + \|\zeta_R' v\|_{0,R}$. Ensuite on obtient facilement que $\lim_{R\to+\infty} \|\zeta_R v' - v'\|_{0,\mathbb{R}} = 0$ en répétant l'argument utilisé plus haut, et on vérifie de plus que

$$\|\zeta_R' v\|_{0,R} \leq \frac{1}{R} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\zeta'\left(\frac{x}{R}\right)\right| \|v\|_{0,\mathbb{R}} \leq \frac{\|\zeta\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})}\|v\|_{0,\mathbb{R}}}{R}.$$

Tout ceci entraîne finalement $\lim_{R\to+\infty} \|\zeta_R v - v\|_{1,\mathbb{R}} = 0$ et montre que l'ensmble des fonctions $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ à support compact est dense dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$.

b) Régularisation. Reste maintenant à prouver pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$ à support compact qu'il existe une suite $(v_m)_m$ de $D(\mathbb{R})$ qui converge vers v dans $D(\mathbb{R})$. Pour cela on considère $\rho \in D(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \rho(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},\ \rho(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1, \\ \int_{\mathbb{R}} \rho(x)dx = 1, \end{cases}$$

et l'on pose $\rho_m(x) = m\rho(mx)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit ensuite la régularisée de v : $v_m(x) = (\rho_m * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_m(x-y)v(y)dy$. Comme $v \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est à support compact alors $v_m \in D(\mathbb{R})$. De plus, comme (voir le §2.6.1-Ex2)

$$\lim_{m\to+\infty} \|\rho_m * f - f\|_{0,\mathbb{R}} = 0,\ \forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}),$$

nous voyons que $\lim_{m\to+\infty} v_m = v$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, puis, en remarquant que $v_m' = \rho_m * v'$, que $\lim_{m\to+\infty} v_m' = v'$. On a ainsi établi que $(v_m)_m$ converge vers v dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$.

□

Dans le cas général $I = (a, b)$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on démontre que façon similaire le

Théorème 9. *$D(\overline{I}) = \{u_{|I},\ u \in D(\mathbb{R})\}$ est dense dans $\mathrm{H}^1(I)$.*

2.3 L'espace $\mathrm{H}_0^1(I)$

2.3.1 Définition

Il est d'usage de poser $\mathrm{H}_0^1(I) = \overline{D(I)}$, la fermeture étant prise au sens de la topologie de la norme dans $\mathrm{H}^1(I)$.

Remarque. *On a évidemment* $\mathrm{H}_0^1(I) \subset \mathrm{H}^1(I)$ *grâce au Théorème 9. De plus, dans le cas particulier où* $I = \mathbb{R}$ *il est clair que* $\mathrm{H}_0^1(\mathbb{R}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{R})$. *Nous verrons plus loin que l'égalité n'a pas lieu si* $I \neq \mathbb{R}$.

Proposition 10. *Pour tout* $u \in \mathrm{H}^1(I)$ *on a l'équivalence suivante :*

$$u \in \mathrm{H}_0^1(I) \Leftrightarrow u_{|\partial I} = 0.$$

Démonstration.
Si $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$, il existe une suite $(u_m)_m$ de $D(I)$ telle que $\lim_{m\to+\infty} \|u_m - u\|_{1,I} = 0$. Comme $(u_m)_m$ converge uniformément vers u sur $\overline{I}$ d'après le §2.6.1 Ex3, on a donc forcément $u_{|\partial I} = 0$. La réciproque est admise. □

Corollaire 11. $\mathrm{H}_0^1(I) \subsetneq \mathrm{H}^1(I)$ *si* $I \neq \mathbb{R}$.

2.3.2 Inégalité de Poincaré

Théorème 12 (Inégalité de Poincaré)**.** *Soit* I *un sous-intervalle borné de* $\mathbb{R}$. *Alors il existe une constante* $C = C(I) > 0$ *ne dépendant que de* I *telle que*

$$\|u\|_{1,I} \leq C\|u'\|_{0,I}, \ \forall u \in \mathrm{H}_0^1(I).$$

Démonstration.
Posons $I = (a, b)$, $a < b$ étant deux réels. Remarquons d'abord que la Proposition 10 entraîne $u(a) = 0$, puisque $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$. En vertu de la Proposition 6 nous avons donc $u(x) = \int_a^x u'(t)dt$ pour tout $x \in I$, de sorte que $|u(x)| \leq (x-a)^{1/2}\|u'\|_{0,I}$. Par suite $\|u\|_{0,I} \leq (\int_I (x-a)dx)^{1/2}\|u'\|_{0,I}$, ce qui implique le résultat. □

Remarque 13. *Si* I *est borné alors* $(u', v')_{0,I}$ *définit donc un produit scalaire sur* $\mathrm{H}_0^1(I)$*, et la norme associée,* $|u|_{1,I} = \|u'\|_{0,I}$*, est équivalente à* $\|u\|_{1,I}$.

2.4 Espaces de Sobolev d'ordres supérieurs

Pour $m \geq 2$, on pose

$$\mathrm{H}^m(I) = \{u \in \mathrm{L}^2(I), \ u^{(k)} \in \mathrm{L}^2(I), \ k = 1, \ldots, m\},$$

où $u^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}^*$, désigne la dérivée distribution d'ordre k de u. Evidemment, on a $\mathrm{H}^m(I) = \{u \in \mathrm{H}^{m-1}(I), \ u' \in \mathrm{H}^{m-1}(I)\}$.
Avec des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du Théorème 3, on obtient le

Théorème 14. *Pour tout $m \geq 2$, $\mathrm{H}^m(I)$ est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire*

$$(u,v)_{m,I} = \sum_{k=0}^{m} (u^{(k)}, v^{(k)})_{0,I}, \ \ u,v \in \mathrm{H}^m(I).$$

On a par ailleurs la généralisation suivante du Corollaire 7 :

Proposition 15. $\mathrm{H}^m(I) \subset \mathrm{C}^{m-1}(\overline{I})$ *pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.*

Démonstration.
Le résultat est vrai pour $m = 1$ en vertu du Corollaire 7. Supposons $m \geq 2$ et le résultat vrai pour $m-1$, i.e. $\mathrm{H}^{m-1}(I) \subset \mathrm{C}^{m-2}(\overline{I})$. Or, pour tout $u \in \mathrm{H}^m(I)$ on a $u' \in \mathrm{H}^{m-1}(I)$, donc $u' \in \mathrm{C}^{m-2}(\overline{I})$. Le résultat est alors une simple conséquence de la seconde partie de la Proposition 6 (car $u \in \mathrm{H}^m(I) \subset \mathrm{H}^1(I)$). □

Remarque. *Il est clair que $D(\overline{I}) \subset \mathrm{H}^m(I)$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $D(\overline{I}) \subset \cap_{m\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}^m(I)$. Réciproquement on déduit facilement de la Proposition 15 que $\cap_{m\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}^m(I) \subset D(\overline{I})$. Par suite on voit que $\cap_{m\in\mathbb{N}^*} \mathrm{H}^m(I) = D(\overline{I})$.*

Par analogie avec le cas $m = 1$, on pose ensuite $\mathrm{H}_0^m(I) = \overline{D(I)}$ au sens de la topologie associée à $\mathrm{H}^m(I)$, et l'on obtient que

$$\mathrm{H}_0^m(I) = \{u \in \mathrm{H}^m(I), \ u_{\partial I}^{(k)} = 0, \ k = 0, \dots, m-1\}.$$

Il faut donc bien distinguer $\mathrm{H}_0^2(I) = \{u \in \mathrm{H}^2(I), \ u_{\partial I} = u'_{\partial I} = 0\}$ de l'espace $\mathrm{H}^2(I) \cap \mathrm{H}_0^1(I) = \{u \in \mathrm{H}^2(I), \ u_{\partial I} = 0\}$.

2.5 Problèmes variationnels

2.5.1 Formulation variationnelle

Considérons le problème (3)-(4) défini au §2.1, sous la forme plus générale suivante : étant donnés deux réels $a < b$, $I = (a,b)$, $c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ et $f \in \mathrm{L}^2(I)$, trouver u solution du problème aux limites

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ \text{p.p. } x \in I & (7) \\ u(a) = u(b) = 0. & (8) \end{cases}$$

Si u est suffisamment régulière, par exemple si $u \in \mathrm{H}^2(I)$, alors en multipliant (7) par $v \in \mathrm{H}_0^1(I)$ et en intégrant sur I, il vient

$$\int_I u'(x)v'(x)dx + \int_I c(x)u(x)v(x)dx = \int_I f(x)v(x)dx, \ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(I). \tag{9}$$

Ici nous avons utilisé la formule d'intégration par parties démontrée dans le §2.6.1-Ex4 en tenant compte de la Proposition 10. L'égalité (9) est la formulation variationnelle de (3)-(4). Elle a un sens dès que $u \in \mathrm{H}^1(I)$. Or il découle justement de (8) et de la Proposition 10 que $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$, ce qui amène à remplacer le problème précédent par le problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \text{Trouver } u \in \mathrm{H}_0^1(I) \text{ vérifiant (9).}$$

On vient donc de voir que si $u \in \mathrm{H}^2(I)$ est solution de (7)-(8) alors u est solution de $(\mathcal{P})$. Réciproquement si u est solution de $(\mathcal{P})$ alors on a

$$\int_I u'(x)\varphi'(x)dx + \int_I c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in D(I),$$

car $D(I) \subset \mathrm{H}_0^1(I)$. Ce qui se réécrit $\langle -u''+cu, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in D(I)$, et donc $-u''+cu = f$ dans $D'(I)$. Or $f \in \mathrm{L}^2(I)$ donc l'égalité précédente a lieu dans $\mathrm{L}^2(I)$, ce qui entraîne d'une part que $u \in \mathrm{H}^2(I)$, et d'autre part que $-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in I$. Enfin $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$ garantit que $u(a) = u(b) = 0$ par la Proposition 10. Ainsi, nous avons démontré l'équivalence

$$u \in \mathrm{H}^2(I) \text{ est solution de } (7) - (8) \Leftrightarrow u \text{ est solution de } (\mathcal{P}). \tag{10}$$

Remarque 16. *V désignant l'espace de Hilbert $\mathrm{H}_0^1(I)$, la forme bilinéaire $a(u,v) = \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx$ est continue sur $V \times V$:*

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|u'\|_{0,I}\|v'\|_{0,I} + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}\|u\|_{0,I}\|v\|_{0,I} \\ &\leq (1 + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(I)})\|u\|_{1,I}\|v\|_{1,I}, \ u, v \in V. \end{aligned}$$

De même, la forme linéaire $L(v) = \int_I f(x)v(x)dx$ est continue sur V (i.e. $L \in V'$) car

$$|L(v)| \leq \|f\|_{0,I}\|v\|_{0,I} \leq \|f\|_{0,I}\|v\|_{1,I}, \ v \in V.$$

Résoudre le problème $(\mathcal{P})$ revient donc à :

$$(\mathcal{P}') \qquad \text{Trouver } u \in V \text{ satisfaisant } a(u,v) = L(v), \ \forall v \in V.$$

Ce qui amène à poser la question suivante : à quelle(s)[9] *condition(s) sur a le problème $(\mathcal{P}')$ admet-il une solution ? Une réponse est donnée par le Théorème 17.*

2.5.2 Problèmes variationnels abstraits

Théorème 17 (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soit V un espace de Hilbert de norme $\|.\|_V$ et produit scalaire $(.,.)_V$. Soient a une forme bilinéaire et continue sur $V \times V$, i.e.*

$$\exists M > 0, \ |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \ u, v \in V,$$

et f une forme linéaire continue sur V, i.e.

$$\exists \ell > 0, \ |L(v)| \leq \ell\|v\|_V, \ v \in V.$$

Si a est V-elliptique, i.e.

$$\exists \alpha > 0, \ a(v,v) \geq \alpha\|v\|_V^2, \ v \in V,$$

alors il existe un unique $u \in V$ satisfaisant $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$.

9. En effet, il est clair que les hypothèses précédentes ne sont pas assez restrictives pour garantir l'existence d'une solution. Il suffit de consider le cas $a(u,v) = 0$ pour le voir.

Démonstration.
Comme V est un espace de Hilbert et que $L \in V'$, le théorème de représentation de Riesz garantit l'existence d'un unique vecteur $\tau \in V$ satisfaisant $L(v) = (\tau, v)_V$ pour tout $v \in V$. De même, pour chaque $u \in V$ fixé, $v \mapsto a(u, v) \in V'$ donc il existe $A_u \in V$ unique tel que l'égalité $a(u, v) = (A_u, v)_V$ a lieu pour tout $v \in V$. L'application

$$A \ : \ \begin{array}{l} V \to V \\ u \mapsto Au = A_u, \end{array}$$

est linéaire et continue, car

$$\|Au\|_V = \sup_{v\in V,\ v\neq 0} \frac{(Au, v)_V}{\|v\|_V} = \sup_{v\in V,\ v\neq 0} \frac{a(u, v)_V}{\|v\|_V} \leq M\|u\|_V,\ u \in V.$$

Le problème équivaut donc à chercher $u \in V$ satisfaisant $Au = \tau$. De ce fait, il suffit donc de prouver que A est une bijection de V. L'injectivité est une conséquence immédiate de la V-ellipticité de a. En effet, comme $\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v, v) = (Av, v) \leq \|Av\|_V\|v\|_V$ pour tout $v \in V$, il vient

$$\|Av\|_V \geq \alpha\|v\|_V,\ v \in V,$$

ce qui garantit que $v = 0$ si $Av = 0$. Pour ce qui est de la surjectivité, elle s'obtient en remarquant d'une part que $AV = \{Av,\ v \in V\}$ est fermé dans V, et d'autre part [10]que $AV^\perp = \{0\}$. Pour vérifier que AV et fermé il suffit de considérer $w \in \overline{AV}$, de sorte qu'il existe une suite $(v_m)_m$ de vecteurs de V telle que $w = \lim_{m\to+\infty} Av_m$ dans V, puis de déduire de la V-ellipticité de a que

$$\|v_{m+p} - v_m\|_V \leq \alpha^{-1}\|Av_{m+p} - Av_m\|_V \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $(v_m)_m$ est une suite de Cauchy dans V donc il existe $v \in V$ tel que $\lim_{m\to+\infty} \|v_m - v\|_V = 0$. Ceci entraîne $\lim_{m\to+\infty} \|Av_m - Av\|_V = 0$ par continuité de A dans V, et donc $w = Av \in AV$. Ceci garantit que $\overline{AV} = AV$. Enfin, si $v \in AV^\perp$, on a $(Av, v)_V = 0$, ce qui implique

$$\|v\|_V^2 \leq \alpha^{-1}(Av, v)_V = 0,$$

en vertu de la V-ellipticité de a. Par suite $v = 0$ et donc $AV^\perp = \{0\}$. □

Remarque. *Si a est symétrique alors il est possible de donner une justification alternative du théorème de Lax-Milgram basée sur des arguments d'optimisation convexe, caractérisant u comme l'unique solution d'un problème de minimisation de la fonctionnelle*

$$\mathrm{F}(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v),\ v \in V.$$

En fait nous avons $(\nabla F(v), w)_V = a(v, w) - L(w)$ pour tous v et w dans V, et donc

$$(\nabla F(v) - \nabla F(w), v - w)_V = a(v - w, v - w) \geq \alpha\|v - w\|^2,\ v, w \in V,$$

10. Car $V = AV \oplus AV^\perp$.

en vertu de la V-ellipticité de a. Il découle de ceci que F est strictement convexe sur V et donc qu'il existe un unique $u \in V$ tel que

$$F(u) = \inf_{v \in V} F(v),$$

par application du théorème de projection sur le convexe V (voir les Théorèmes 8.1-1 et 8.4-1 de [3]). De plus u est caractérisé par la condition d'Euler $\nabla F(u) = 0$ pour tout $v \in V$, qui se réécrit bien $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$.

2.5.3 Un résultat d'existence et d'unicité pour le problème $(\mathcal{P})$

Théorème 18. *Soit $f \in \mathrm{L}^2(I)$ avec $I = (a,b)$ et $-\infty < a < b < \infty$. Si $c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ satisfait la condition*

$$c(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in I, \tag{11}$$

alors il existe un unique $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$ solution de $(\mathcal{P})$.

Démonstration.
Les notations étant celles de la remarque 16, il suffit, au vu du Théorème 17, de vérifier que $a(u,v) = \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx$ est $\mathrm{H}_0^1(I)$-elliptique. En fait l'hypothèse de non-négativité faite sur c garantit que

$$a(v,v) = \|v'\|_{0,I}^2 + \|c^{1/2}v\|_{0,I}^2 \geq \|v'\|_{0,I}^2, \ v \in \mathrm{H}_0^1(I).$$

Ensuite, comme I est borné, $\|v'\|_{0,I} = |v|_{1,I}$ est équivalente à $\|v\|_{1,I}$ dans $\mathrm{H}_0^1(I)$ en vertu de la remarque 13, donc le résultat est acquis. □
A la lumière de (10) nous avons donc obtenu le

Corollaire 19. *Sous les hypothèses du Théorème 18 il existe un unique $u \in \mathrm{H}^2(I) \cap \mathrm{H}_0^1(I)$ satisfaisant (7)-(8).*

On déduit de plus de la Proposition 15 que $u \in \mathrm{C}^1(\overline{I})$.

2.6 Exercices

2.6.1 Enoncés

Ex1. Soit I un sous-intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (pas forcément borné). Montrer pour tout $u \in \mathrm{H}^1(I)$ et tout $\psi \in D(I)$ que $(\psi u)' = \psi' u + \psi u'$. En déduire que $\varphi u \in \mathrm{H}^1(I)$.

Ex2. Soit ρ_m la suite régularisante définie dans la démonstration de la Proposition 8. Montrer que $\lim_{m \to +\infty} \|\rho_m * f - f\|_{0,\mathbb{R}} = 0$ pour tout $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

Ex3. Soit $I = (a,b)$, avec $a < b$, un sous-intervalle de $\mathbb{R}$ (pas forcment borné). Montrer que $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(I)} \leq \|u\|_{1,I}$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1(I)$.
Indication : on commencera par établir l'inégalité $|\psi(x)| \leq \|\psi\|_{1,I}$ pour $\psi \in D(\overline{I})$ et tout $x \in \overline{I}$, puis on utilisera la densité de $D(\overline{I})$ dans $\mathrm{H}^1(I)$.

Ex4. Soient u et v dans $\mathrm{H}^1(I)$, où I est un sous-intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (pas forcément borné).

a) Montrer que $uv \in \mathrm{H}^1(I)$ et que $(uv)' = u'v + uv'$.

b) Montrer que $\int_x^y u'(t)v(t)dt + \int_x^y u(t)v'(t)dt = u(y)v(y) - u(x)v(x)$ pour tout $x, y \in \overline{I}$.

Indication : utiliser la densité de $D(\overline{I})$ dans $\mathrm{H}^1(I)$.

Ex5. (**Conditions aux limites de Neumann homogènes**).
Etant donnés $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$ et $c \in \mathrm{L}^\infty(a,b)$, on considère le problème aux limites suivant : trouver $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in [a,b] & (12) \\ u'(a) = u'(b) = 0. & (13) \end{cases}$$

a) Montrer que si $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ est solution de (12)-(13) alors u est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \ \forall v \in \mathrm{H}^1(a,b). \tag{14}$$

b) Montrer réciproquement que si $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$ satisfait (14) alors u est solution de (12)-(13).

c) Supposant qu'il existe $c_0 > 0$ tel que $c(x) \geq c_0$ p.p. $x \in (a,b)$, montrer qu'il existe $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$ unique, qui est solution de (14). Conclure.

Ex6. (**Conditions aux limites mixtes homogènes**).
Etant donnés $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$ et $c \in \mathrm{L}^\infty(a,b)$, on considère le problème aux limites suivant : trouver $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in [a,b] & (15) \\ u(a) = 0, \ u'(b) = 0. & (16) \end{cases}$$

a) En utilisant la continuité de l'injection $\mathrm{H}^1(a,b) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(a,b)$, montrer que $V = \{v \in \mathrm{H}^1(a,b), \ v(a) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{H}^1(a,b)$.

b) Montrer que si $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ est solution de (15)-(16) alors u est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \ \forall v \in V. \tag{17}$$

c) Montrer réciproquement que si $u \in V$ satisfait (17) alors u est solution de (15)-(16).

d) En supposant qu'il existe $c_0 > 0$ tel que $c(x) \geq c_0$ p.p. $x \in (a,b)$, montrer (17) admet une unique solution $u \in V$. Conclure.

Ex7. (**Conditions aux limites de Dirichlet non homogènes**).
Etant donnés $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$, $c \in \mathrm{L}^\infty(a,b)$, et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on considère le problème aux limites suivant : trouver $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in [a,b] & (18) \\ u(a) = \alpha, \ u(b) = \beta. & (19) \end{cases}$$

Considérons ensuite $u_0 \in \mathrm{H}^1(a,b)$ satisfaisant $u_0(a) = \alpha$ et $u_0(b) = \beta$.

a) Montrer que si $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ est solution de (18)-(19) alors u est solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx, \ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(a,b) & (20) \\ u - u_0 \in \mathrm{H}_0^1(a,b). & (21) \end{cases}$$

b) Montrer réciproquement que si $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$ satisfait (20)-(21) alors $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ est solution de (18)-(19).

c) On suppose $c(x) \geq 0$ p.p. $x \in (a,b)$. Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$ unique satisfaisant (20)-(21). Conclure.

Ex8. (**Conditions aux limites de Neumann non homogènes**).
Etant donnés $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \mathrm{L}^2(a,b)$, $c \in \mathrm{L}^\infty(a,b)$, et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on considère le problème aux limites suivant : trouver $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ vérifiant :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in [a,b] & (22) \\ u'(a) = \alpha, \ u'(b) = \beta. & (23) \end{cases}$$

a) Montrer que si $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ est solution de (22)-(23) alors u est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx - \alpha v(a) + \beta v(b), \ \forall v \in \mathrm{H}^1(a,b). \tag{24}$$

b) Montrer réciproquement que si $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$ satisfait (24) alors $u \in \mathrm{H}^2(a,b)$ est solution de (22)-(23).

c) On suppose maintenant $c(x) \geq c_0 > 0$ p.p. $x \in (a,b)$. Montrer que (24) admet une unique solution $u \in \mathrm{H}^1(a,b)$. Conclure.

Ex9. Soient $I = (0,1)$ et $x_0 \in I$.

a) Montrer à l'aide de la continuité de l'injection $\mathrm{H}^1(I) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(I)$ que δ_{x_0} se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathrm{H}_0^1(I)$, encore notée δ_{x_0}.

b) Montrer alors qu'il existe $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$ unique satisfaisant

$$\int_I u'(x)v'(x)dx = \delta_{x_0}(v), \ v \in \mathrm{H}_0^1(I). \tag{25}$$

c) Montrer enfin $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$ est solution de (25) si et seulement $-u'' = -\delta_{x_0}$. Conclure.

d) Calculer ensuite explicitement u.

2.6.2 Solutions des Ex 1, 2, 3 et 4.

Ex1. On a $\psi u \in \mathrm{L}^2(I)$ car $\psi \in \mathrm{L}^\infty(I)$ et $u \in \mathrm{L}^2(I)$, donc

$$\langle (\psi u)', \varphi \rangle = -\langle \psi u, \varphi' \rangle = -\int_I \psi(x) u(x) \varphi'(x) dx,$$

pour tout $\varphi \in D(I)$. Comme $\psi\varphi' = (\psi\varphi)' - \psi'\varphi$ au sens fort, et que $\psi\varphi \in D(I)$, il résulte donc de ce qui précéde :

$$\langle (\psi u)', \varphi \rangle = \langle u', \psi\varphi \rangle + \langle u\psi', \varphi \rangle.$$

Or $\langle u', \psi\varphi \rangle = \int_I u'(x)\psi(x)\varphi(x) dx = \langle \psi u', \varphi \rangle$ car $u' \in \mathrm{L}^2(I)$ et donc $\psi u' \in \mathrm{L}^2(I)$. Ce qui donne finalement

$$\langle (\psi u)', \varphi \rangle = \langle \psi u', \varphi \rangle + \langle u\psi', \varphi \rangle, \ \varphi \in D(I),$$

et prouve le résultat. Par suite $(\psi u)' \in \mathrm{L}^2(I)$ donc $\psi u \in \mathrm{H}^1(I)$.

Ex2. Soit $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ tel que

$$(|y| < \delta) \Rightarrow (|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in K),$$

car f est uniformément continue sur K. Ainsi, pour tout $x \in K$, on a

$$\begin{aligned} (\rho_m * f - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_m(y) f(x-y) dy - f(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_m(y)(f(x-y) - f(x)) dy \\ &= \int_{-1/m}^{1/m} \rho_m(y)(f(x-y) - f(x)) dy, \ m \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\int_{\mathbb{R}} \rho_m(x) dx = 1$ et supp $\rho_m \subset [-1/m, 1/m]$. Par suite pour tout $m_0 \geq 1$ assez grand de sorte que $1/m_0 < \delta$, il vient

$$|(\rho_m * f - f)(x)| < \varepsilon, \ x \in K, \ m \geq m_0.$$

Cela montre que si $f \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ alors $\rho_m * f$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$.
Supposons maintenant que $f \in D(\mathbb{R})$ et posons $K = \text{supp } f$. Comme supp $\rho_m * f \subset \tilde{K} = \{x \in \mathbb{R}, \ \text{dist}(x, K) \leq 1/m\}$, alors $\lim_{m \to +\infty} \|\rho_m * f - f\|_{\mathrm{L}^\infty(\tilde{K})} = 0$ vu ce qui précède, donc $(\rho_m * f)_m$ converge vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ car $\tilde{K}$ est de mesure finie.
Finalement, si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $f_\varepsilon \in D(\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}} < \varepsilon$. Or, en admettant provisoirement que $\|\rho_m * f - \rho_m * f_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}} = \|\rho_m * (f - f_\varepsilon)\|_{0,\mathbb{R}} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}}$, on a pour tout $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|\rho_m * f - f\|_{0,\mathbb{R}} &\leq \|\rho_m * f - \rho_m * f_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}} + \|\rho_m * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}} + \|f_\varepsilon - f\|_{0,\mathbb{R}} \\ &\leq 2\|f_\varepsilon - f\|_{0,\mathbb{R}}\| + \|\rho_m * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}} \\ &< 2\varepsilon + \|\rho_m * f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{0,\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

de sorte que $\|\rho_m * f - f\|_{0,\mathbb{R}} < 3\varepsilon$ si m est assez grand d'après ce qui précède. Reste donc à justifier que $\|\rho_m * g\|_{0,\mathbb{R}} \leq \|g\|_{0,\mathbb{R}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Ceci peut être vu en remarquant pour tout $x \in \mathbb{R}$, que

$$|(\rho_m * g)(x)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} \rho_m(x-y)g(y)dy \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} \rho_m(x-y)g(y)^2 dy,$$

via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui entraîne bien

$$\|\rho_m * g\|_{0,\mathbb{R}}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \rho_m(x-y)g(y)^2 dxdy = \|g\|_{0,\mathbb{R}}^2.$$

Ex3. Si $\psi \in D(\overline{I})$ on peut écrire $\psi(x)^2 = 2\int_a^x \psi(t)\psi'(t)dt$ pour tout $x \in \overline{I}$, puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela donne $\psi(x)^2 \leq 2\|\psi\|_{0,I}\|\psi'\|_{0,I} \leq \|\psi\|_{1,I}^2$. On se donne ensuite $(u_m)_m$ dans $D(\overline{I})$ telle que $\lim_{m\to+\infty} \|u - u_m\|_{1,I} = 0$. On sait d'après ce qui précède que $\|u_{m+p} - u_m\|_{\mathrm{L}^\infty(I)} \leq \|u_{m+p} - u_m\|_{1,I}$ pour tout $m, p \in \mathbb{N}$, de sorte que $(u_m)_m$ est de Cauchy, et donc converge, dans $\mathrm{L}^\infty(I)$. Notons g sa limite : $\lim_{m\to+\infty} \|u_m - g\|_{\mathrm{L}^\infty(I)} = 0$. Comme $\mathrm{L}^\infty(I) \subset \mathrm{L}^1_{loc}(I)$ il est clair que $(u_m)_m$ converge vers g dans $D'(I)$. De plus, comme $(u_m)_m$ converge vers u dans $\mathrm{L}^2(I)$, et donc dans $D'(I)$, on en déduit que $g = u$ par unicité de la limite. Maintenant, comme $|u_m(x)| \leq \|u_m\|_{1,I}$ pour tout $x \in \overline{I}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, le résultat s'obtient en faisant tendre m vers l'infini.

Ex4.

a) Soient $(u_m)_m$ et $(v_m)_m$ deux suites dans $D(\overline{I})$ satisfaisant

$$\lim_{m\to+\infty} \|u - u_m\|_{1,I} = \lim_{m\to+\infty} \|v - v_m\|_{1,I} = 0. \tag{26}$$

Comme $\mathrm{H}^1(I)$ s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^\infty(I)$ d'après l'Ex3, il s'ensuit de (26) que $(u_m)_m$ et $(v_m)_m$ convergent uniformément sur $\overline{I}$, vers respectivement u et v :

$$\lim_{m\to+\infty} \|u_m - u\|_{\mathrm{L}^\infty(I)} = \lim_{m\to+\infty} \|v_m - v\|_{\mathrm{L}^\infty(I)} = 0.$$

Ainsi $(u_m v_m)_m$ converge vers uv dans $\mathrm{L}^2(I)$, et donc dans $D'(I)$. La dérivation étant continue dans $D'(I)$, $((u_m v_m)')_m$ converge donc vers $(uv)'$ dans $D'(I)$. De plus, $(u'_m v_m)_m$ et $(u_m v'_m)_m$ [11]convergent respectivement vers $u'v$ et uv' dans $\mathrm{L}^2(I)$, donc dans $D'(I)$. Or pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons $(u_m v_m)' = u'_m v_m + u_m v'_m$ au sens classique (et donc au sens faible), ce qui fait l'on obtient $(uv)' = u'v + uv'$ dans $D'(I)$ en faisant tendre m vers l'infini. Comme le membre de droite de l'égalité précédente appartient à $\mathrm{L}^2(I)$, celle-ci a lieu dans $\mathrm{L}^2(I)$, ce qui établit que $uv \in \mathrm{H}^1(I)$.

b) Les suites $(u_m)_m$ et $(v_m)_m$ étant celles de 1), il suffit de faire tendre m vers l'infini dans l'égalité $\int_x^y u'_m(t)v_m(t)dt + \int_x^y u_m(t)v'_m(t)dt = u_m(y)v_m(y) - u_m(x)v_m(x)$, qui a lieu pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $x, y \in \overline{I}$.

11. En effet nous avons $\|u'_m v_m - u'v\|_{0,I} \leq \|(u'_m - u')v_m\|_0 + \|u'(v_m - v)\|_{0,I} \leq \|u'_m - u'\|_{0,I}\|v_m\|_{\mathrm{L}^\infty(I)} + \|u'\|_{0,I}\|v_m - v\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

3 Schémas aux différences finies en dimension 1

Etant donnés deux réels $a < b$, $I = (a, b)$, $c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ satisfaisant la condition (11) et $f \in \mathrm{L}^2(I)$, on considère le problème aux limites (7)-(8), dont on sait grâce au Corollaire 19 qu'il admet une unique solution $u \in \mathrm{H}^2(I) \cap \mathrm{H}^1_0(I)$. L'objectif de ce chapitre est de construire une fonction approchant u en approximant l'opérateur "dérivée seconde" de (7) par un schéma numérique aux différences finies.

3.1 Construction du schéma aux différences finies

3.1.1 Partition régulière de I

Pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, soit $\sigma_I = \{x_j\}_{j=0}^{N+1}$ la partition régulière de I obtenue en posant

$$x_j = jh,\ 0 \leq j \leq N+1,\ \text{où } h = \frac{b-a}{N+1} \text{ est le pas de la subdivision } \sigma_I.$$

Notons $U_h^* = (u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_N))^T$ le vecteur de $\mathbb{R}^N$ formé par les N valeurs successivement prises par u aux points $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de σ_I. Le but de la méthode exposée est de déterminer $U_h = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ satisfaisant

$$\lim_{h \to 0} \|U_h - U_h^*\|_\infty = 0. \tag{27}$$

Ici $\|.\|_\infty$ désigne la [12]norme infinie de $\mathbb{R}^N$, de sorte que la condition (27) est équivalente à

$$\lim_{h \to 0} |u_j - u(x_j)| = 0,\ \forall j = 1, \ldots, N. \tag{28}$$

3.1.2 Schéma aux différences finies 1D

Approximation au premier ordre de la dérivée seconde. Soit x un réel fixé. Si v est une fonction [13]"suffisamment régulière" dans un voisinage de x, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 garantit l'existence d'un réel $x_\pm \in (x, x \pm (h/2))$ satisfaisant

$$v\left(x \pm \frac{h}{2}\right) = v(x) \pm \frac{h}{2} v'(x) + \frac{h^2}{8} v''(x) + \frac{h^3}{48} v^{(3)}(x_\pm),$$

ce qui implique facilement (en faisant la différence des égalités obtenues séparément avec le signe $+$ puis avec le signe $-$) que :

$$hv'(x) = v\left(x + \frac{h}{2}\right) - v\left(x - \frac{h}{2}\right) + O(h^3). \tag{29}$$

En appliquant (29) à $v(x) = u(x \pm h/2)$, on obtient alors que

$$hu'\left(x \pm \frac{h}{2}\right) = \pm(u(x \pm h) - u(x)) + O(h^3), \tag{30}$$

et comme, de plus,

$$hu''(x) = u'\left(x + \frac{h}{2}\right) - u'\left(x - \frac{h}{2}\right) + O(h^3),$$

12. Elle est définie pour tout $V = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$ par $\|V\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |v_j|$.
13. Il suffit en fait que v soit deux fois continûment dérivable et admette une dérivée d'ordre 3.

en prenant $v = u'$ dans (29), il s'ensuit immédiatement de ceci et de (30) que

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h). \tag{31}$$

Construction du schéma. Posant $c_j = c(x_j)$ et $f_j = f(x_j)$ pour tout $j = 1, \ldots, N$, on définit le *schéma aux différences finies* associé à (7)-(8) comme suit :

$$\begin{cases} -\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{h^2} + c_j u_j = f_j, \ 1 \leq j \leq N & (32) \\ u_0 = u_{N+1} = 0. & (33) \end{cases}$$

Clairement, (33) traduit les conditions aux limites (8), tandis que (32) est la version discrète de l'équation différentielle (7) dont la partie différentielle a été approximée par le second membre de (31). Il est facile de voir que le système (32)-(33) se met sous la forme matricielle équivalente

$$A_h U_h = F_h, \tag{34}$$

où A_h est la matrice tridiagonale $N \times N$ suivante

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} a_1^{(h)} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & a_2^{(h)} & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & a_{N-1}^{(h)} & -1 \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & a_N^{(h)} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

d'éléments diagonaux $a_j^{(h)} = 2 + c_j h^2$, $1 \leq j \leq N$.

On a donc remplacé (en un certain sens "approximé") le problème initial, qui est de trouver $u \in \mathrm{H}^2(I) \cap \mathrm{H}_0^1(I)$ satisfaisant (7)-(8), par celui formé par le système linéaire (34), d'inconnue $U_h \in \mathbb{R}^N$. Il est donc naturel de se poser les deux questions suivantes, qui seront examinées dans la suite de ce chapitre :

(i) Le système linéaire (34) admet-il une unique solution $U_h \in \mathbb{R}^N$?

(ii) Dans l'affirmative, la condition (27) est-elle [14]satisfaite ?

3.2 Existence et unicité de la solution du problème discret

Lemme 20. *Pour tout $V = (v_1, v_2, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ on a :*

$$(A_h V, V)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{j=1}^{N} c_j v_j^2 + \frac{1}{h^2} \left(v_1^2 + \sum_{j=1}^{N-1} (v_j - v_{j-1})^2 + v_N^2 \right).$$

14. Autrement dit : la solution approchée U_h converge-t-elle vers la solution discrétisée exacte U_h^* lorsque le pas de la subdivision σ_I tend vers 0 ?

Démonstration.
D'après (35) A_h se décompose en la somme $C + \Delta_h$ de la matrice diagonale $C = \operatorname{diag}(c_j)_{1\le j\le N}$ et de

$$\Delta_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

de sorte que $(A_hV,V)_{\mathbb{R}^N} = (CV,V)_{\mathbb{R}^N} + (\Delta_hV,V)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{j=1}^N c_jv_j^2 + (\Delta_hV,V)_{\mathbb{R}^N}$. Il suffit donc de prouver que

$$h^2(\Delta_hV,V)_{\mathbb{R}^N} = v_1^2 + \sum_{j=1}^{N-1}(v_j - v_{j-1})^2 + v_N^2. \tag{36}$$

En fait, on a

$$\begin{aligned} & h^2(A_hV,V)_{\mathbb{R}^N} \\ = \;& (2v_1 - v_2)v_1 + \sum_{j=2}^{N-1}(-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1})v_j + (2v_N - v_{N-1})v_N \\ = \;& (2v_1 - v_2)v_1 + \sum_{j=2}^{N-1}(v_j - v_{j-1})v_j - \sum_{j=2}^{N-1}(v_{j+1} - v_j)v_j + (2v_N - v_{N-1})v_N, \end{aligned}$$

par un calcul direct, ce qui permet, en utilisant le fait que $\sum_{j=2}^{N-1}(v_j - v_{j-1})v_j = \sum_{j=1}^{N-2}(v_{j+1} - v_j)v_{j-1}$, d'aboutir ensuite facilement à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} h^2(A_hV,V)_{\mathbb{R}^N} = \;& (2v_1 - v_2)v_1 + (v_2 - v_1)v_2 + \sum_{j=2}^{N-2}[(v_{j+1} - v_j)v_{j+1} - (v_{j+1} - v_j)v_j] \\ & -(v_N - v_{N-1})v_{N-1} + (2v_N - v_{N-1})v_N. \end{aligned}$$

Comme $(2v_1 - v_2)v_1 + (v_2 - v_1)v_2 = v_1^2 + (v_2 - v_1)^2$ et $-(v_N - v_{N-1})v_{N-1} + (2v_N - v_{N-1})v_N = (v_N - v_{N-1})^2 + v_N^2$, on obtient finalement que

$$h^2(A_hV,V)_{\mathbb{R}^N} = v_1^2 + (v_2 - v_1)^2 + \sum_{j=2}^{N-2}(v_{j+1} - v_j)^2 + (v_N - v_{N-1})^2 + v_N^2,$$

ce qui n'est autre que (36). □
Le corollaire naturel du Lemme 20 fournit le

Proposition 21. *La matrice A_h est symétrique définie positive, et donc inversible.*

Démonstration.
La symétrie est évidente et la positivité découle directement du Lemme 20 combiné au fait que $c_j \ge 0$ pour tout $j = 1, \dots, N$, en vertu de (11). Ensuite, si $(A_hV,V)_{\mathbb{R}^N} = 0$

le Lemme 20 et (11) entraînent que $v_1 = v_N = 0$ et $v_{j+1} - v_j = 0$ pour tout $j = 1, \dots, N-1$, ce qui implique facilement que $v_1 = v_2 = \dots = v_N = 0$, i.e. que $V = 0$, et donc que A_h est définie. $\square$
Il résulte évidemment de la Proposition 21 que $U_h = A_h^{-1} F_h$ existe et est uniquement déterminé.

3.3 Monotonie

Commençons par introduire les trois définitions suivantes.

(a) La matrice $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le N} \in \mathbb{R}^{N^2}$ est dite [15] *à termes positifs* si $m_{i,j} \ge 0$ pour tout $1 \le i, j \le N$.

(b) Le vecteur $V = (v_1, v_2, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ est dit *positif* si $v_i \ge 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$. On note dans ce cas $V \ge 0$.

(c) Une matrice carrée M est dite *monotone* si elle inversible et que son inverse M^{-1} est à termes positifs.

Ceci posé, on va maintenant montrer que :

Proposition 22. *La matrice A_h est monotone.*

Démonstration.
Il suffit en fait de prouver que A_h obéit au “principe du maximum discret”, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'implication suivante :

$$(\forall V \in \mathbb{R}^N,\ A_h V \ge 0) \Longrightarrow (V \ge 0). \tag{37}$$

En effet, E_j désignant le $j^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$ pour chaque $j = 1, \dots, N$, le $j^{\text{ième}}$ vecteur colonne B_j de la matrice A_h^{-1} s'écrit $B_j = A_h^{-1} E_j$, de sorte que l'on a $E_j = A_h B_j \ge 0$ (puisque toutes les coordonnées de E_j valent 0 à l'exception de la $j^{\text{ième}}$ qui est égale à 1). Ceci implique $B_j \ge 0$ grâce à (37) et montre le résultat cherché.
Afin de justifier (37), considérons $p \in \{1, 2, \dots, N\}$ tel que $v_p = \min_{1 \le j \le N} v_j$, chacun des v_j, $1 \le j \le N$, désignant la $j^{\text{ième}}$ coordonnée de V.

(i) Si $p = 1$ (resp. $p = N$) alors on a $v_1 - v_2 \le 0$ (resp. $v_N - v_{N-1} \le 0$), donc, comme $(A_h V)_1 = (2 + c_1 h^2) v_1 - v_2 = (1 + c_1 h^2) v_1 + (v_1 - v_2) \ge 0$ (resp. $(A_h V)_N = -v_{N-1} + (2 + c_N h^2) v_N = (1 + c_N h^2) v_N + (v_N - v_{N-1}) \ge 0$) par hypothèse, cela implique que $(1 + c_1 h^2) v_1 \ge 0$ (resp. $(1 + c_N h^2) v_N \ge 0$) et donc que $v_1 \ge 0$ (resp. $v_N \ge 0$).

(ii) Si $p \in \{2, \dots, N-1\}$ on a dans ce cas $v_p - v_{p-1} \le 0$ et $v_p - v_{p+1} \le 0$, de sorte que l'hypothèse $(A_h V)_p = -v_{p-1} + (2 + c_p h^2) v_p - v_{p+1} = (v_p - v_{p-1}) + c_p h^2 v_p + (v_p - v_{p+1}) \ge 0$ entraîne nécessairement que $c_p h^2 v_p \ge 0$, c'est-à-dire que $c_p v_p \ge 0$.
– Si $c_p \neq 0$, c'est-à-dire $c_p > 0$ d'après (11), on en déduit que $v_p \ge 0$.

15. A ne pas confondre avec la notion de *positivité matricielle*, qui, elle, se traduit pas le fait que l'inégalité $(MV, V)_{\mathbb{R}^N} \ge 0$ doit être satisfaite pour tout $V \in \mathbb{R}^N$. En fait, une matrice à termes positifs n'est pas forcément positive ; il suffit de considérer le cas de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour s'en convaincre. Et réciproquement, une matrice positive n'est pas forcément à termes positifs non plus, comme on peut le vérifier sur l'exemple de $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

– Dans le cas où $c_p = 0$, on remarque que $(A_h V)_p$, qui est ≥ 0, est la somme de $v_p - v_{p-1}$ et $v_p - v_{p+1}$, qui sont tous deux ≤ 0, ce qui signifie que $v_p = v_{p\pm 1}$. Il est donc possible de reprendre le raisonnement précédent avec $p \pm 1$ (disons $p+1$ pour fixer les idées) au lieu de p. Comme il n'y a qu'un nombre fini (N exactement) de valeurs de p possibles, on aboutit donc nécessairement à la conclusion de l'un des deux cas examinés plus haut, à savoir qu'il existe $p_0 \in \{p+1, \dots N\}$ tel que $v_p = v_{p+1} = \dots = v_{p_0} \geq 0$.

On a donc obtenu que $v_j \geq v_p \geq 0$ pour tout $j = 1, \dots, N$, ce qui établit bien que $V \geq 0$, et prouve (37). □

3.4 Consistance

On appelle *erreur de consistance* le vecteur $R \in \mathbb{R}^N$ dont la $j^{\text{ième}}$ composante

$$r_j = \frac{1}{h^2}\big(-u(x_{j-1}) + (2 + c_j h^2)u(x_j) - u(x_{j+1})\big) - f_j, \; 1 \leq j \leq N, \tag{38}$$

est obtenue en remplaçant le vecteur U_h par la “solution exacte” U_h^* dans le schéma aux différences finies (32). Autrement dit,

$$R_h = A_h U_h^* - F_h = A_h(U_h^* - U_h), \tag{39}$$

la deuxième égalité étant simplement une réécriture de la première combinée à (34). De plus, comme $f_j = f(x_j) = -u''(x_j) + c_j u(x_j)$ pour tout $j = 1, 2, \dots, N$, d'après (7), il résulte facilement de (38) que

$$r_j = \frac{1}{h^2}\big(-u(x_{j-1}) + (2 + c_j h^2)u(x_j) - u(x_{j+1})\big) - (-u''(x_j) + c_j u(x_j)), \tag{40}$$

ce qui montre que (la $j^{\text{ième}}$ composante) de l'erreur de consistance R_h mesure l'erreur d'approximation de l'opérateur différentiel $-\frac{d^2}{dx^2} + c$ par le schéma (32) (au point x_j). On dit que le schéma (32)-(33) est *consistant* si

$$\lim_{h \to 0} \|R_h\|_\infty = 0.$$

S'il existe de plus deux constantes $p > 0$ et $C > 0$ indépendantes de h, pour lesquelles on a

$$\|R_h\|_\infty \leq C h^p,$$

pour tout $h > 0$ assez petit, ce schéma sera dit *d'ordre* p.

Lemme 23. *Si* $u \in \mathrm{C}^4(\bar{I})$ *alors le schéma* (32)-(33) *est consistant et d'ordre* 2. *Plus précisément on a :*

$$\|R_h\|_\infty \leq \frac{\|u^{(4)}\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}}{12} h^2. \tag{41}$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 à u (ce qui licite au vu les hypothèses de régularité faites sur cette fonction). Pour chaque $j = 1, \dots, N$,

elle garantit l'existence de $x_j^{\pm} \in (x_j, x_j \pm h)$ (c'est-à-dire $x_j^+ \in (x_j, x_{j+1})$ et $x_j^- \in (x_{j-1}, x_j)$) satisfaisant l'égalité

$$u(x_{j\pm 1}) = u(x_j) \pm hu'(x_j) + \frac{h^2}{2}u''(x_j) \pm \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x_j) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x_j^{\pm}),$$

ce qui entraîne immédiatement que

$$-u(x_{j-1})+(2+c_jh^2)u(x_j)-u(x_{j+1}) = h^2(-u''(x_j)+c_j^2u(x_j))-\frac{h^4}{24}\left(u^{(4)}(x_j^-)+u^{(4)}(x_j^+)\right).$$

Il résulte de ceci et de (40) que $r_j = -(h^2/24)(u^{(4)}(x_j^-) + u^{(4)}(x_j^+))$, ce qui implique bien (41). □

3.5 Stabilité

La solution U_h de (34) dépendant du vecteur F_h, on dit que le schéma (32)-(33) est *stable* s'il existe une constante $c > 0$ [16]indépendante de h vérifiant

$$\|U_h\|_\infty \leq c\|F_h\|_\infty,\ \forall F_h \in \mathbb{R}^N,\ \forall h > 0. \tag{42}$$

La terminologie employée ici s'explique par le fait qu'un tel schéma garantit la stabilité de la solution U_h par rapport à une éventuelle perturbation du second membre F_h. En effet, si l'on modifie F_h en $F_h + \delta F_h$, la solution $\tilde{U}_h$ du système perturbé associé à $F_h + \delta F_h$ vérifie $A_h\tilde{U}_h = F_h + \delta F_h$, ce qui donne $A_h(\tilde{U}_h - U_h) = \delta F_h$ en vertu de (34). Le vecteur $\tilde{U}_h - U_h$ est donc solution du schéma (32)-(33) associé au second membre δF_h. Or, si ce schéma est stable, alors (42) s'applique à δF_h et entraîne

$$\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty \leq c\|\delta F_h\|_\infty,$$

garantissant ainsi que l'erreur d'approximation $\|\tilde{U}_h - U_h\|_\infty$ de U_h par la solution perturbée $\tilde{U}_h$, est contrôlée (à une constante multiplicative près) par la taille de la perturbation δF_h elle-même.
A la lumière de (34), il est clair qu'une condition suffisante (c'est même une condition équivalente) garantissant (42) est

$$\|A_h^{-1}\|_\infty = \sup_{V\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \frac{\|A_h^{-1}V\|_\infty}{\|V\|_\infty} = \sup_{V\in\mathbb{R}^N,\ \|V\|_\infty=1} \|A_h^{-1}V\|_\infty \leq c,$$

ce qui signifie que la norme matricielle de A_h^{-1} induite par la norme (vectorielle) infinie, [17]notée $\|A_h^{-1}\|_\infty$ et définie comme ci-dessus, est majorée par c, uniformément par rapport à h. En effet, dans ce cas on vérifie bien que

$$\|U_h\|_\infty = \|A_h^{-1}F_h\|_\infty = \frac{\|A_h^{-1}F_h\|_\infty}{\|F_h\|_\infty}\|F_h\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty\|F_h\|_\infty \leq c\|F_h\|_\infty.$$

Lemme 24. *Le schéma* (32)-(33) *est stable.*

16. Mais dépendant éventuellement de u.
17. La notation est identique à celle utilisée pour la norme vectorielle infinie, bien qu'il s'agisse ici d'une norme matricielle.

Démonstration.
Reprenant les notations du Lemme 20 on a $A_h = C + \Delta_h$. Comme Δ_h coïncide avec A_h lorsque la fonction $c = 0$, il résulte des Propositions 21 et 22 que Δ_h et A_h sont toutes deux inversibles et monotones. En multipliant l'égalité précédente à gauche par Δ_h^{-1}, et à droite par A_h^{-1}, on obtient [18]l'identité suivante

$$\Delta_h^{-1} - A_h^{-1} = \Delta_h^{-1} C A_h^{-1}$$

dans laquelle le second membre est à termes positifs, puisque formé par le produit de trois matrices à termes positifs. Il ressort facilement de ceci, et de l'expression explicite

$$\|M\|_\infty = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |m_{i,j}|, \tag{43}$$

valable pour n'importe quelle matrice $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le N}$, que

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \le \|\Delta_h^{-1}\|_\infty. \tag{44}$$

Pour prouver le résultat désiré, il suffit donc de montrer que la norme $\|\Delta_h^{-1}\|_\infty$ est uniformément majorée par rapport à h. Pour cela, commençons d'abord par établir que

$$\|\Delta_h^{-1}\|_\infty = \|\Delta_h^{-1} E\|_\infty, \tag{45}$$

où $E = (1, 1, \dots, 1)^T$ est le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont toutes les composantes valent 1. En effet, la $i^{\text{ième}}$ composante de $\Delta_h^{-1} E$, $1 \le i \le N$, est égale à $\sum_{j=1}^{N} (\Delta_h^{-1})_{i,j}$, ou encore à $\sum_{j=1}^{N} |(\Delta_h^{-1})_{i,j}|$ puisque Δ_h^{-1} est à termes positifs. On obtient ainsi, par définition de la norme (vectorielle) infinie, que $\|\Delta_h^{-1} E\|_\infty = \max_{1\le i\le N} \sum_{j=1}^{N} |(\Delta_h^{-1})_{i,j}|$, ce qui, à la lumière de (43), implique bien (45). Ceci fait, il convient de remarquer que $D = \Delta_h^{-1} E$ et E sont respectivement le second membre et la solution du problème (32)-(33) associé à la discrétisation du problème

$$\begin{cases} -u'' = 1 \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire du problème (7)-(8) lorsque $c = 0$ et $f(x) = 1$, $x \in I$. Ce problème admet une unique solution, qui est $u(x) = (x-a)(b-x)/2$. Elle satisfait $u^{(4)} = 0$ donc $A_h(U_h - U_h^*) = R_h = 0$ en vertu de la seconde égalité de (39) et du Lemme 23. Ce qui donne $(A_h(U_h - U_h^*), U_h - U_h^*)_{\mathbb{R}^N} = 0$, et finalement $U_h = U_h^*$ puisque A_h est définie en vertu de la Proposition 21. Ainsi la $i^{\text{ième}}$ composante d_i de D vérifie

$$d_i = u_i = u(x_i) = \frac{(x_i - a)(b - x_i)}{2} = \frac{ih(b - a - ih)}{2}, \ 1 \le i \le N,$$

de sorte que

$$\|D\|_\infty = \max_{1\le i\le N} |d_i| = \max_{1\le i\le N} \left| \frac{ih(b-a-ih)}{2} \right| \le \sup_{x\in[a,b]} \frac{x(b-a-x)}{2} = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

Compte tenu de l'égalité $D = \Delta_h^{-1} E$ et de (44)-(45), nous avons donc obtenu que $\|A_h^{-1}\|_\infty \le (b-a)^2/8$, ce qui entraîne (42) avec $c = (b-a)^2/8$, et achève la démonstration.

18. Connue sous le nom de "première formule de la résolvante".

□

A toutes fins utiles, remarquons qu'il ressort également de la démonstration précédente que :

$$\|A_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2}{8}. \tag{46}$$

3.6 Convergence du schéma

Théorème 25. *Si* $u \in \mathrm{C}^4(\overline{I})$ *alors on a*

$$\|U_h - U_h^*\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2}{96} \sup_{x\in\overline{I}} |u^{(4)}(x)| h^2.$$

Démonstration.
On sait que $R_h = A_h(U_h - U_h^*)$ en vertu de la seconde égalité de (39) et du Lemme 23. Par suite $U_h - U_h^* = A_h^{-1}R_h$, de sorte que

$$\|U_h - U_h^*\|_\infty \leq \|A_h^{-1}\|_\infty \|R_h\|_\infty.$$

Le résultat s'ensuit donc immédiatemment de ceci, du Lemme 23 et de (46). □
Le Théorème 25 établit donc que *l'erreur de discrétisation* $|u_i - u(x_i)|$ *en* x_i, décroît, pour chaque $i = 1, \ldots, N$, quadratiquement par rapport au pas de la subdivision.
Par ailleurs, on vérifie sur cet exemple que la **stabilité** (c'est-à-dire, le fait que $\|A_h^{-1}\|_\infty$ soit majorée par une constante indépendante de h) et la **consistance** (le fait que $\lim_{h\to 0} \|R_h\|_\infty = 0$) du schéma entraînent la **convergence** en norme L^∞-discrète.

3.7 Exercices

3.7.1 Enoncés

Ex1. (Rappels sur la notion de norme matricielle). Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \geq 1$, on rappelle que $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{1/p}$ définit une norme appelée *norme p* sur $\mathbb{R}^N$. Si $p = 2$ il s'agit évidemment de la norme euclidienne. De même $\|v\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,N} |v_i|$, est une norme appelée *norme infinie*. Elle peut être vue comme la limite des normes p en ce sens que $\|v\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|v\|_p$, $\forall v \in \mathbb{R}^N$. Une *norme matricielle* sur $M_N(\mathbb{R})$ est une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^{N^2}$ qui est continue pour le produit matriciel, en ce sens qu'elle vérifie la condition supplémentaire suivante :

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \ \forall A, B \in M_N(\mathbb{R}).$$

Soit $\|.\|$ une norme vectorielle sur $\mathbb{R}^N$. Pour tout $A \in M_N(\mathbb{R})$ la quantité

$$\|A\| = \sup_{v\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},\ \|v\|\leq 1} \|Av\| = \sup_{v\in\mathbb{R}^N,\ \|v\|=1} \|Av\|,$$

s'appelle *norme induite par* $\|.\|$ de A (on parle aussi de norme subbordonnée à $\|.\|$). C'est une norme matricielle sur $M_N(\mathbb{R})$, qui vérifie entre autres propriétés immédiates :

(i) $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|, \ \forall v \in \mathbb{R}^N$.

(ii) $\|A\| = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+, \ \|Av\| \leq \alpha\|v\|, \ \forall v \in \mathbb{R}^N\}$.

(iii) $\exists u \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\},\ \|Au\| = \|A\|\|u\|$.

Dans le cas particulier où $\|.\| = \|.\|_p$ et $p = 1, \infty$, on va prouver qu'il est possible de donner une expression explicite de la norme induite associée. On considère pour cela $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in M_N(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^N |a_{ij}|$.

b) Soit $j_0 \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^N |a_{ij_0}|$. Vérifier que $\|Ae_{j_0}\|_1 = \|A\|_1 \|e_{j_0}\|_1$ où e_{j_0} désigne le $j_0^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^N$ (i.e. $(e_{j_0})_i = \delta_{i,j_0}$, $1 \leq i \leq N$).

c) Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^N |a_{ij}|$.

d) Si A est à termes positifs (i.e. si $a_{i,j} \geq 0$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$), montrer que $\|Ae\|_\infty = \|A\|_\infty \|e\|_\infty$, où $e = (1, \ldots, 1)^T$.

Ex2. Etant donnés $c, f \in \mathrm{C}^2([0,1])$ avec $c(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$, on considère le système

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x),\ x \in [0,1] & (47) \\ u(0) = u(1) = 0, & (48) \end{cases}$$

et l'on se donne un maillage $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1$ dont le pas n'est pas forcément uniforme.

a) Ecrire un schéma aux différences finies consistant avec (47)-(48).

b) Quel est son ordre ?

c) Montrer (en vous inspirant de la méthode développée en cours) que le schéma est stable.

Ex3. Etant donné $f \in \mathrm{C}^0([0,1])$ satisfaisant $\int_0^1 f(t)dt = 0$, on considère l'équation de Laplace avec conditions aux bords homogènes de type Neumann :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x),\ x \in [0,1] & (49) \\ u'(0) = u'(1) = 0. & (50) \end{cases}$$

a) Montrer que le problème (49)-(50) possède une unique solution $u \in \mathrm{C}^2([0,1])$ déterminée à une constante additive près. Préciser son expression.

b) On se donne ensuite $N \geq 1$ et l'on pose $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N+1$, où $h = 1/(N+1)$. Définir un schéma aux différences finies consistant avec (49)-(50). Préciser en particulier comment se traduisent les conditions aux limites (50).

c) Mettre ensuite ce schéma sous forme matricielle $A_h u_h = f_h$ où $u_h = (u_0, \ldots, u_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2}$ donne une approximation de la solution exacte u de (49)-(50) aux points $x_1, \ldots, x_N$.

d) Montrer que A_h est symétrique et que la dimension de son noyau est 1. Sous quelle condition sur f_h le problème $A_h u_h = f_h$ admet-il au moins une solution ? Comment choisir f_h de sorte que cette condition soit toujours satisfaite et que f_h "approche" f ?

Ex4. Etant donnés $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathrm{C}^0([0,1])$, on considère l'équation de Laplace avec conditions aux bords non homogènes de type Dirichlet :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x),\ x \in [0,1] & (51) \\ u(0) = a,\ u(1) = b. & (52) \end{cases}$$

a) Montrer que le sytème (51)-(52) admet une unique solution $u \in \mathrm{C}^2([0,1])$ dont on donnera l'expression explicite (en fonction de f).

b) Ecrire un schéma aux différences pour approcher la solution de (51)-(52).

c) Comment se traduisent les conditions aux limites (52) ?

3.7.2 Correction de l'Ex3

a) Si $u \in \mathrm{C}^2([0,1])$ est solution de (49)-(50) alors elle vérifie forcément

$$u'(t) = u'(0) + \int_0^t u''(y)\mathrm{d}y = -\int_0^t f(y)\mathrm{d}y,\ t \in [0,1],$$

en vertu de (49) et de la première égalité de (50). En intégrant cette égalité sur $[0, x]$, $x \in [0,1]$, il vient ensuite

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t = u(0) - \int_0^x \int_0^t f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t,\ x \in [0,1].$$

Ainsi toute solution de classe C^2 de (49)-(50) est nécessairement de la forme

$$[0,1] \ni x \mapsto u_C(x) = C - \int_0^x \int_0^t f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t, \tag{53}$$

où C est une constante réelle arbitraire.
Réciproquement, il est clair que $x \mapsto \int_0^x \int_0^t f(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}t \in \mathrm{C}^2([0,1])$ car $f \in \mathrm{C}^0([0,1])$, et donc que la fonction u_C définie par (53) est bien de classe C^2 sur $[0,1]$ quel que soit $C \in \mathbb{R}$. De plus, un calcul direct montre que u_C vérifie simultanément [19]bien (49) et (50) donc l'ensemble des solutions de (49)-(50) est donc $\{u_C,\ C \in \mathbb{R}\}$.

b) En écrivant (49) en chacun des points x_j, $j = 1, \ldots, N$, et en utilisant la formule d'approximation (31), qui est précise à l'ordre 1 en h, il vient facilement que

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} = f_j = f(x_j),\ 1 \leq j \leq N. \tag{54}$$

On retrouve ainsi (32) dans le cas particulier où la fonction c est identiquement nulle. Reste à traduire les conditions de Neumann (50). Pour cela on utilise la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2,

$$u'(x) = \pm \frac{u(x \pm h) - u(x)}{h} + O(h),$$

qui permet d'approximer $u'(0)$ par $(u_1 - u_0)/h$ (en prenant $x = x_0 = 0$ et le signe $+$ dans l'égalité précédente) et $u'(1)$ par $(u_{N+1} - u_N)/h$ (en choisissant cette fois $x = x_{N+1} = 1$ et le signe $-$). De ce fait les conditions aux limites (50) se traduisent par les deux identités suivantes :

$$u_1 - u_0 = 0,\ u_{N+1} - u_N = 0. \tag{55}$$

19. L'égalité $u'_C(1) = 0$ découle de la condition $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

c) Afin d'obtenir une matrice de rigidité A_h qui soit symétrique, on réécrit (55) sous la forme équivalente suivante :

$$\frac{u_0 - u_1}{h^2} = 0, \; \frac{-u_N + u_{N+1}}{h^2} = 0,$$

de sorte que (54)-(55) se met sous la forme matricielle $A_h U_h = f_h$, où A_h est la matrice carrée de taille $N+2$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et $F_h = (0, f_1, \dots, f_N, 0)^T \in \mathbb{R}^{N+2}$, avec $f_j = f(x_j)$, $j = 1, \dots, N$.

d) Le fait que A_h soit symétrique est évident, et un calcul élémentaire montre que son noyau ker A_h est la droite véctorielle engendrée par $E = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{N+2}$. Le problème $A_h u_h = f_h$ admet donc une solution à condition que $f_h \in \text{Im } A_h$. Comme $\text{Im } A_h = (\ker A_h)^\perp$ puisque A_h est symétrique, cela revient à imposer

$$(f_h, E)_{\mathbb{R}^{N+2}} = \sum_{j=1}^{N} f_j = 0. \tag{56}$$

Si l'on choisit $f_h = (0, f_1, \dots, f_N, 0)^T$ avec $f_1 = \int_0^{3h/2} f(x)\mathrm{d}x$, $f_j = \int_{x_j-(h/2)}^{x_j+(h/2)} f(x)\mathrm{d}x$ pour $j = 2, \dots, N-1$ et $f_N = \int_{1-3(h/2)}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ alors la condition $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$ garantit que f_h obéit bien à (56) puisque $\sum_{j=1}^N f_j = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ avec le choix précédent. De plus f_h approxime correctement f en ce sens que chacun des f_j, $j = 2, \dots, N-1$, est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[x_j - (h/2), x_j + (h/2)]$.

4 Schémas éléments finis $\mathbb{P}_1$ en dimension 1

La stratégie de la méthode des *différences finies* consiste à approximer l'opérateur différentiel du problème (7)-(8) à l'aide d'une formule de différences. Dans la méthode *éléments finis*, qui va être présentée ici dans le cas particulier très simple des éléments de type $\mathbb{P}_1$, ce sont les fonctions de la formulation variationnelle associée (9), et non l'opérateur différentiel, qui sont approximées. Cette technique procède par la construction de fonctions approchées qui ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres. Ainsi, au lieu de considérer la solution du système d'équations étudié dans un espace de dimension infinie, on cherche la solution du même problème dans un espace de dimension finie.

4.1 Approximation des fonctions

Soient $a < b$ deux réels et $I = (a, b)$.

4.1.1 Discrétisation et espace d'approximation

L'objectif est de construire un espace d'approximation ayant une base simple dans laquelle toute fonction de $\mathrm{C}^0(\overline{I})$ se décompose très facilement. Le plus simple est d'utiliser des fonctions affines par morceaux, ce qui nous amène naturellement à considérer l'espace des fonctions polynômiales (à coefficients réels) de degré ≤ 1,

$$\mathbb{P}_1 = \{x \mapsto \alpha x + \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

On se donne ensuite une partition de I, notée σ_I,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = b,\ N \geq 1,\ h = \max_{0 \leq i \leq N}(x_{i+1} - x_i), \tag{57}$$

à partir de laquelle on définit l'espace d'approximation (associé aux éléments finis $\mathbb{P}_1$)

$$V_h^1 = \{v, v \in \mathrm{C}^0(\overline{I}) \text{ et } v_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1,\ 0 \leq i \leq N\}. \tag{58}$$

4.1.2 $N + 2$ fonctions "chapeau"

Commençons par remarquer qu'il existe $N + 2$ fonctions $\varphi_j \in V_h^1$, $j = 0, \ldots, N + 1$, dites "chapeau" (du fait de la forme de leur graphe pour $j = 1, \ldots, N$) qui satisfont

$$\varphi_j(x_k) = \delta_{j,k},\ 0 \leq j, k \leq N + 1. \tag{59}$$

Pour cela, il suffit de vérifier que

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq x_1 \\ \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1, \end{cases} \tag{60}$$

puis

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{j-1} \text{ ou } x \geq x_{j+1} \\ \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \end{cases} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N, \tag{61}$$

et

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_N \\ \frac{x-x_N}{x_{N+1}-x_N} & \text{si } x_N \leq x \leq x_{N+1}, \end{cases} \tag{62}$$

conviennent. Ces $N+2$ fonctions décrivent effectivemment V_h^1 en ce sens que :

Proposition 26. V_h^1 *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel de dimension* $N+2$ *dont une base naturelle (ou "canonique") est* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{N+1}$.

Démonstration.
Il découle directement de (59) que $\{\varphi_j\}_{j=0}^{N+1}$ est libre. La famille est de plus génératrice dans V_h^1, car on vérifie facilement que

$$v = \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j)\varphi_j, \; v \in V_h^1. \tag{63}$$

□

4.1.3 L'élément fini $\mathbb{P}_1$ est de classe H^1

Par cette phrase, on entend simplement que :

Proposition 27. $V_h^1 \subset \mathrm{H}^1(I)$.

Démonstration.
Eu égard à la Proposition 26 il suffit de vérifier que chacune des fonctions φ_j, $j = 0, \ldots, N+1$, appartient à $\mathrm{H}^1(I)$. D'abord, comme elles sont continues sur I, borné, ce sont évidemment des fonctions de $\mathrm{L}^2(I)$. Reste à montrer que leur dérivée φ_j' (prise au sens des distributions) est également de carré intégrable sur I. Faisons-le pour φ_0, le raisonnement étant identique pour φ_j, $j = 1, \ldots, N+1$. En fait pour tout $\varphi \in D(I)$, on a par définition de φ_0' (c'est-à-dire de T'_{φ_0}, pour reprendre les notations utilisées au §1)

$$\langle \varphi_0', \varphi \rangle_{D(I)',D(I)} = \langle T'_{\varphi_0}, \varphi \rangle_{D(I)',D(I)} = -\langle T_{\varphi_0}, \varphi' \rangle_{D(I)',D(I)} = -\int_I \varphi_0(x)\varphi'(x)dx,$$

puisque T_{φ_0} est une distribution $\mathrm{L}^2(I)$-régulière. A la lumière de (60), cela donne

$$\begin{aligned} \langle \varphi_0', \varphi \rangle_{D(I)',D(I)} &= -\int_{x_0}^{x_1} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\varphi'(x)dx \\ &= -\left[\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\varphi(x)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x_1 - x_0}\varphi(x)dx, \end{aligned} \tag{64}$$

en intégrant par parties sur (x_0, x_1), ce qui est licite puisque $x \mapsto (x_1 - x)/(x_1 - x_0)$ et φ sont bien de classe C^1 (et même C^∞) sur cet intervalle. Comme φ est à support compact sur $I = (x_0, x_{N+1})$ elle vérifie $\varphi(x_0) = 0$, de sorte que $\left[\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\varphi(x)\right]_{x_0}^{x_1} = 0$ et (64) devient finalement

$$\langle \varphi_0', \varphi \rangle_{D(I)',D(I)} = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x_1 - x_0}\varphi(x)dx = \int_I -\frac{\mathbb{I}_{(x_0,x_1)}(x)}{x_1 - x_0}\varphi(x)dx,$$

où $\mathbb{I}_J$ désigne la fonction indicatrice de n'importe quel sous-ensemble $J \subset \mathbb{R}$. Or $x \mapsto -\mathbb{I}_{(x_0,x_1)}/(x_1 - x_0) \in \mathrm{L}^2(I)$ donc l'égalité précédente établit que la dérivée distribution de φ_0 est une distribution $\mathrm{L}^2(I)$-régulière

$$\varphi_0'(x) = -\frac{\mathbb{I}_{(x_0,x_1)}(x)}{x_1 - x_0},\ x \in I,$$

et par suite que $\varphi_0 \in \mathrm{H}^1(I)$. $\square$

4.1.4 Approximation des fonctions par les éléments finis $\mathbb{P}_1$

A la lumière de (63), on définit l'opérateur de projection (de $\mathrm{C}^0(\overline{I})$) sur V_h^1 par :

$$\begin{array}{rccl} \Pi_h^1 : & \mathrm{C}^0(\overline{I}) & \to & V_h^1 \\ & v & \mapsto & \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j)\varphi_j. \end{array} \tag{65}$$

C'est un opérateur linéaire et continu pour la topologie de la norme de $\mathrm{L}^\infty(I)$, en ce sens que

$$\|\Pi_h^1 v\|_{\mathrm{L}^\infty(I)} \le \|v\|_{\mathrm{L}^\infty(I)},\ v \in \mathrm{C}^0(\overline{I}). \tag{66}$$

En effet, pour chaque $j = 0, \ldots, N$, on a simultanément $\varphi_j(x) \ge 0$, $\varphi_{j+1}(x) \ge 0$ et $\varphi_j(x) + \varphi_{j+1}(x) = 1$ pour tout $x \in [x_j, x_{j+1}]$, de sorte que

$$\begin{array}{rcl} |(\Pi_h^1 v)(x)| & = & |v(x_j)\varphi_j(x) + v(x_{j+1})\varphi_{j+1}(x)| \\ & \le & \max(|v(x_j)|, |v(x_{j+1})|)(\varphi_j(x) + \varphi_{j+1}(x)) \\ & \le & \max(|v(x_j)|, |v(x_{j+1})|),\ x \in [x_j, x_{j+1}]. \end{array}$$

Par suite, $|(\Pi_h^1 v)(x)| \le \max_{0 \le j \le N+1} |v(x_j)| \le \|v\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}$ pour tout $x \in \overline{I}$, ce qui entraîne immédiatement (66).

Remarque. *L'opérateur Π_h^1 est un opérateur d'interpolation : le graphe de $\Pi_h^1 v$ s'obtient en effet en reliant les points $(x_j, v(x_j))$ et $(x_{j+1}, v(x_{j+1}))$, $j = 0, \ldots, N$, par des segments de droite.*

Proposition 28. *Pour tout $v \in \mathrm{H}^2(I)$ on a*

$$\|v - \Pi_h^1 v\|_{0,I} \le h^2 \|v''\|_{0,I} \text{ et } \|(v - \Pi_h^1 v)'\|_{0,I} \le h\|v''\|_{0,I}.$$

Démonstration.
Posons $v_h = \Pi_h^1 v$. On a $v - v_h \in \mathrm{H}^1(I)$ en vertu de la Proposition 27, donc

$$(v - v_h)(x) - (v - v_h)(x_j) = \int_{x_j}^{x} (v - v_h)'(t)dt,\ x \in [x_j, x_{j+1}],\ 0 \le j \le N,$$

d'après le Lemme 5. Comme $(v - v_h)(x_j) = 0$ au vu de (59) et de (65), il résulte de ceci combiné à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{array}{rcl} |(v - v_h)(x)| & \le & (x - x_j)^{1/2} \left(\displaystyle\int_{x_j}^{x} (v - v_h)'(t)^2 dt \right)^{1/2} \\ & \le & h^{1/2} \left(\displaystyle\int_{x_j}^{x_{j+1}} (v - v_h)'(t)^2 dt \right)^{1/2},\ x \in [x_j, x_{j+1}],\ 0 \le j \le N. \end{array}$$

En élevant l'inégalité précédente au carré et en intégrant le résultat obtenu par rapport à x sur $I_j = (x_j, x_{j+1})$, il vient ensuite $\|v - v_h\|_{0,I_j} \le h\|(v - v_h)'\|_{0,I_j}$ pour tout $j = 0, \dots, N$, de sorte que l'on obtient finalement :

$$\|v - v_h\|_{0,I} \le h\|(v - v_h)'\|_{0,I}. \tag{67}$$

Posons maintenant $w = (v - v_h)'$, c'est-à-dire :

$$w(x) = v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{x_{j+1} - x_j},\ x \in (x_j, x_{j+1}),\ 0 \le j \le N,$$

d'après (60)-(62) et (65). Ainsi $\int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x)dx = 0$ pour tout $j = 0, \dots, N$. Comme w est continue sur $[x_j, x_{j+1}]$, cela garantit l'existence de $\tilde{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$ satisfaisant $w(\tilde{x}_j) = 0$. Maintenant, en utilisant le fait que $w \in \mathrm{H}^1(x_j, x_{j+1})$ et que $w'(x) = v''(x)$ pour presque tout $x \in (x_j, x_{j+1})$, il vient

$$w(x) = w(x) - w(\tilde{x}_j) = \int_{\tilde{x}_j}^{x} w'(t)dt = \int_{\tilde{x}_j}^{x} v''(t)dt,\ x \in [x_j, x_{j+1}].$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient alors pour tout $x \in [x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N$, que

$$|w(x)| \le |x - \tilde{x}_j|^{1/2} \left(\int_{\tilde{x}_j}^{x} v''(t)^2 dt \right)^{1/2} \le h^{1/2} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} v''(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

ce qui entraîne $\|w\|_{0,I_j} \le h\|v''\|_{0,I_j}$ et donne finalement

$$\|(v - v_h)'\|_{0,I} \le h\|v''\|_{0,I}. \tag{68}$$

Le résultat cherché se déduit facilement de (67)-(68). □

4.2 Le problème discret

Comme au §4.1, I désigne l'intervalle ouvert (a, b) où $a < b$ sont deux nombres réels fixés. On considère ensuite $f \in \mathrm{L}^2(I)$ et $c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ satisfaisant l'hypothèse (11), c'est-à-dire :

$$c(x) \ge 0,\ \text{p.p. } x \in I.$$

D'après le Corollaire 19 il existe un unique $u \in \mathrm{H}^2(I) \cap \mathrm{H}_0^1(I)$ qui est solution de (7)-(8). Grâce à (10) on peut aussi caractériser u comme l'unique solution du problème variationnel $(\mathcal{P})$, c'est-à-dire l'unique fonction $u \in \mathrm{H}_0^1(I)$ satisfaisant (9), qui se réécrit sous la forme

$$a(u, v) = L(v),\ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(I), \tag{69}$$

où l'on a posé

$$a(u, v) = \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx$$

et

$$L(v) = \int_I f(x)v(x)dx.$$

4.2.1 Formulation variationnelle discrète

A partir de la partition (57) de I, on considère maintenant à la lumière de (58) l'espace fonctionnel suivant :

$$\begin{aligned} V^1_{0,h} &= \{v \in V^1_h,\ v(a) = v(b) = 0\} \\ &= \{v \in \mathrm{C}^0(\bar{I}),\ v_{|[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1,\ 0 \le j \le N,\ v(a) = v(b) = 0\}. \end{aligned} \tag{70}$$

En fait, il résulte facilement de (70) et du §4.1 (en particulier de la démonstration des Propositions 26 et 27) que :

(a) $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ est une base de $V^1_{0,h}$ et $v = \sum_{j=1}^N v(x_j)\varphi_j$ pour tout $v \in V^1_{0,h}$;

(b) $V^1_{0,h} \subset \mathrm{H}^1_0(I)$.

Le problème variationnel discret $(\mathcal{P}_h)$ associé à (7)-(8) consiste donc à trouver $u_h \in V^1_{0,h}$ satisfaisant

$$a(u_h, v_h) = L(v_h),\ \forall v_h \in V^1_{0,h}. \tag{71}$$

L'espace $V^1_{0,h}$ étant de dimension finie en vertu de (a), c'est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{H}^1_0(I)$ d'après (b). C'est donc un espace de Hilbert (pour la norme de $\mathrm{H}^1_0(I)$), ce qui, via le Théorème 17, garantit l'existence et l'unicité de la solution u_h du problème discret $(\mathcal{P}_h)$, c'est-à-dire de $u_h \in V^1_{0,h}$ satisfaisant (71).

4.2.2 Mise sous forme matricielle

A la lumière du §4.2.1 (a), u_h se met sous la forme

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i\varphi_i,\ \text{avec } u_i = u_h(x_i),\ 1 \le i \le N, \tag{72}$$

et de même,

$$v_h = \sum_{j=1}^N v_j\varphi_j,\ \text{où } v_j = v_h(x_j),\ 1 \le j \le N, \tag{73}$$

pour tout $v_h \in V^1_{0,h}$. Posant ensuite $U_h = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ et $V_h = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$, il vient facilement à partir de (72)-(73) que

$$a(u_h, v_h) = \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}u_iv_j = V_h^T A_h U_h \text{ où } A_h = (a_{i,j})_{1\le i,j\le N} \text{ et } a_{i,j} = a(\varphi_i, \varphi_j), \tag{74}$$

et

$$L(v_h) = \sum_{j=1}^N L(\varphi_j)v_j = V_h^T F_h \text{ avec } F_h = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T \text{ et } f_j = L(\varphi_j). \tag{75}$$

La matrice A_h définie dans (74) est appelée[20] *matrice de rigidité* du problème $(\mathcal{P}_h)$. Il résulte ainsi de (71)–(75) que

$$\begin{aligned} u_h \text{ est solution de } (\mathcal{P}_h) &\iff U_h \in \mathbb{R}^N \text{ satisfait } V_h^T A_h U_h = V_h^T F_h,\ \forall V_h \in \mathbb{R}^N \\ &\iff U_h \in \mathbb{R}^N \text{ est solution de } A_hU_h = F_h. \end{aligned} \tag{76}$$

20. Cette dénomination remonte aux origines de la méthode des éléments finis, qui a initialement été développée pour le calcul de structures.

La résolution du problème discret $(\mathcal{P}_h)$ se ramène donc à celle du système linéaire (dans $\mathbb{R}^N$) défini par (76). Autrement dit, trouver u_h revient à calculer le vecteur $U_h \in \mathbb{R}^N$ solution de $A_h U_h = F_h$. L'inversibilité de ce système (ainsi que le choix de la méthode numérique utilisée pour l'inverser) découle directement des propriétés de la matrice de rigidité A_h.

Lemme 29. *La matrice de rigidité A_h du système* (76) *est :*

(a) symétrique définie et positive (et donc inversible) ;

(b) tridiagonale, en ce sens que :

$$a_{i,j} = 0 \text{ pour tous } 1 \le i, j \le N \text{ tels que } |i - j| \ge 2.$$

Démonstration.
(a) D'après (72)–(74) on a $V_h^T A_h U_h = a(u_h, v_h)$ pour tout $u_h, v_h \in V^1_{0,h}$, c'est-à-dire pour tout $U_h, V_h \in \mathbb{R}^N$. Comme a est symétrique, cela implique $V_h^T A_h U_h = U_h^T A_h V_h$ pour tout $U_h, V_h \in \mathbb{R}^N$, et donc $A_h^T = A_h$. Ensuite, comme a est $\mathrm{H}^1_0(I)$-elliptique (voir la démonstration du Théorème 18) il existe une constante $C > 0$ telle que $a(u_h, u_h) \ge C\|u_h\|^2_{1,I}$ pour tout $u_h \in V^1_{0,h}$. Par suite, $U_h^T A_h U_h \ge 0$ pour tout $U_h \in \mathbb{R}^N$, donc A_h est positive, et $U_h^T A_h U_h = 0$ entraîne $U_h = 0$, ce qui montre que A_h est définie.
(b) Enfin, comme $\operatorname{supp} \varphi_i \cap \operatorname{supp} \varphi_j = \emptyset$ si $|i - j| \ge 2$ d'après (61), il vient facilement que $a_{i,j} = \int_I (\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x))dx = 0$ dans ce cas. $\square$

4.2.3 Convergence de la méthode

Avant d'énoncer le résultat établissant la convergence de la méthode, rappelons qu'en vertu de l'équivalence (10), l'unique solution $u \in \mathrm{H}^1_0(I)$ de (9) coïncide en fait avec l'unique solution $u \in \mathrm{H}^2(I)$ de (7)-(8).

Théorème 30. *La fonction $c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ satisfaisant* (11)*, soit $u \in \mathrm{H}^1_0(I)$ l'unique solution de* (9)*, et soit $u_h \in V^1_{0,h}$ celle de* (71)*. Alors, il existe une constante $c > 0$, indépendante de h, u et u_h, telle que :*

$$\|u - u_h\|_{1,I} \le c\|u''\|_{0,I} h. \tag{77}$$

Démonstration.
Comme u satisfait (9), c'est-à-dire $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1_0(I)$, et que $V^1_{0,h} \subset \mathrm{H}^1_0(I)$, on a nécessairement :

$$a(u, v_h) = L(v_h), \ \forall v_h \in V^1_{0,h}. \tag{78}$$

Ensuite, en soustrayant (71) à (78) et en utilisant la linéarité la forme $w \mapsto a(w, v_h)$, il vient [21]immédiatement :

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \ \forall v_h \in V^1_{0,h}. \tag{79}$$

21. Ce qui traduit l'orthogonalité de $u - u_h$ et v_h au sens du produit scalaire induit par a.

Ainsi,

$$\begin{aligned} a(u-u_h, u-u_h) &= a(u-u_h, u) - a(u-u_h, u_h) \\ &= a(u-u_h, u) \\ &= a(u-u_h, u-v_h), \ v_h \in V^1_{0,h}, \end{aligned}$$

en vertu de (79). Eu égard à (11) ceci implique ensuite pour tout $v_h \in V^1_{0,h}$ que

$$\begin{aligned} \|(u-u_h)'\|^2_{0,I} \leq a(u-u_h, u-u_h) &\leq \|(u-u_h)'\|_{0,I}\|(u-v_h)'\|_{0,I} \\ &\quad + c_\infty \|(u-u_h)\|_{0,I}\|(u-v_h)\|_{0,I}, \end{aligned} \quad (80)$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en notant c_∞ à la place de $\|c\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}$. Or, $\|u-u_h\|_{0,I} \leq C(I)\|(u-u_h)'\|_{0,I}$ (resp. $\|u-v_h\|_{0,I} \leq C(I)\|(u-v_h)'\|_{0,I}$) d'après le Théorème 12, car $u - u_h \in \mathrm{H}^1_0(I)$ (resp. $u - v_h \in \mathrm{H}^1_0(I)$), la constante de Poincaré $C(I) > 0$ ne dépendant que de I, de sorte que (80) entraîne $\|(u-u_h)'\|^2_{0,I} \leq (1 + c_\infty C(I)^2)\|(u-u_h)'\|_{0,I}\|(u-v_h)'\|_{0,I}$ pour n'importe quel $v_h \in V^1_{0,h}$, soit

$$\|(u-u_h)'\|_{0,I} \leq (1 + c_\infty C(I)^2)\|(u-v_h)'\|_{0,I}, \ \forall v_h \in V^1_{0,h}. \quad (81)$$

Comme $u - u_h \in \mathrm{H}^1_0(I)$, la remarque 14 permet, quitte à multiplier $(1 + c_\infty C(I)^2)$ par une constante strictement positive et ne dépendant que de I, de remplacer $\|(u-u_h)'\|_{0,I}$ par $\|u-u_h\|_{1,I}$ dans le membre de gauche de (81). Le résultat s'obtient finalement en choisissant $v_h = \Pi^1_h u$ dans (81), puis en appliquant la deuxième inégalité de la Proposition 28. □

Le Théorème 30 établit que l'erreur d'approximation (il s'agit ici de la norme $\mathrm{H}^1(I)$ de la différence $u - u_h$) de la solution exacte u du problème (7)-(8), par la solution u_h du problème variationnel discret (71), décroît (au minimum) linéairement avec le pas h de la partition σ_I de I. La précision de l'approximation de u par u_h est donc essentiellement déterminée par la qualité de la partition choisie : plus cette partition est fine (c'est-à-dire plus h est petit) meilleure sera l'approximation de u par u_h. Mais, la taille de la matrice de rigidité A_h étant une fonction croissante de h^{-1}, le coût des calculs numériques nécessaires à l'inversion de A_h sera d'autant plus élevé que la partition choisie est fine. En résumé, raffiner la partition σ_I permet d'améliorer la précision des calculs, mais en augmente le coût.

Si le préfacteur de h dans le membre de droite de l'inégalité (77) dépend *a priori* de la solution exacte u (en fait de sa dérivée seconde) dans le cas général examiné au Théorème 30, on va voir que ce n'est plus le cas si c est minorée par une constante strictement positive.

Corollaire 31. *Si $c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ satisfait* (11) *et que*

$$c(x) \geq c_0 > 0, \ \text{p.p. } x \in I, \quad (82)$$

alors, il existe une constante $c > 0$, indépendante de h, u_h et u, telle que

$$\|u-u_h\|_{1,I} \leq c\|f\|_{0,I}h.$$

Démonstration.

A la lumière du Théorème 30, il suffit de contrôler $\|u''\|_{0,I}$ dans le membre de droite de (77). Pour cela, on déduit d'abord de (7), que

$$\|u''\|_{0,I} = \|f - cu\|_{0,I} \leq \|f\|_{0,I} + c_\infty\|u\|_{0,I}, \quad (83)$$

où c_∞ désigne $\|c\|_{\mathrm{L}^\infty(I)}$. Ensuite, en écrivant (9) dans le cas particulier où $v = u$ (ce qui a bien un sens car $u \in \mathrm{H}^1_0(I)$), il vient facilement que $\|u'\|^2_{0,I} + \|c^{1/2}u\|^2_{0,I} = (f, u)_{0,I}$, de sorte que $\|u'\|^2_{0,I} + c_0\|u\|^2_{0,I} \le \|f\|_{0,I}\|u\|_{0,I}$, et donc

$$c_0\|u\|^2_{0,I} \le \|f\|_{0,I}\|u\|_{0,I}.$$

Ainsi, $\|u\|_{0,I} \le \|f\|_{0,I}/c_0$, ce qui, combiné à (83), entraîne

$$\|u''\|_{0,I} \le \left(1 + \frac{c_\infty}{c_0}\right)\|f\|_{0,I}.$$

Ceci associé à (77) démontre le résultat. □

4.3 Exercices sur les schémas éléments finis 1D

4.3.1 Enoncés

Ex1. (Éléments finis $\mathbb{P}_0$).
Soit $\mathbb{P}_0$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré 0 sur $\mathbb{R}$. Pour une partition donnée $\sigma_I = \{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}^*$, de $I = (0, 1)$, dont le pas est h, on considère l'espace d'approximation

$$V_h^0 = \{v \in \mathrm{L}^2(I),\ v_{|(x_i,x_{i+1})} \in \mathbb{P}_0,\ 0 \le i \le N\}.$$

a) Vérifier que V_h^0 est un espace vectoriel de dimension $N + 1$.

b) Exprimer ensuite l'opérateur de projection Π_h^0. Cet élément fini est-il de classe $\mathrm{L}^2(I)$? $\mathrm{C}^0(I)$?

c) Montrer pour tout $v \in \mathrm{H}^1(I)$ que $\|v - \Pi_h^0 v\|_{0,I} \le h\|v'\|_{0,I}$.

Ex2. (Éléments finis $\mathbb{P}_2$).
Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace des fonctions polynômiales de degré ≤ 2 sur $\mathbb{R}$. Etant donnés $N \in \mathbb{N}$ et une partition σ_I de $I = (0, 1)$ comme dans l'**Ex1**, on considère l'espace d'approximation

$$V_h^2 = \{v \in \mathrm{C}^0(\overline{I}),\ v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_2,\ 0 \le i \le N\}.$$

a) Vérifier que V_h^2 est un espace vectoriel de dimension $2N + 3$, et que la famille des fonctions φ_j, $0 \le j \le N + 1$ et ψ_j, $0 \le j \le N$, vérifiant respectivement

$$\begin{cases} \varphi_j \in V_h^2, & \varphi_j(x_k) = \delta_{j,k},\ \varphi_j(x_{k+1/2}) = 0,\ \forall k, \\ \psi_j \in V_h^2, & \psi_j(x_k) = 0,\ \psi_j(x_{k+1/2}) = \delta_{j,k}, \forall k, \end{cases}$$

où $x_{k+1/2} = (x_k + x_{k+1})/2$ pour tout $0 \le k \le N$, est bien définie. Montrer ensuite que cette famille est une base de V_h^2.

b) Exprimer ensuite l'opérateur de projection Π_h^2. Cet élément fini est-il de classe $\mathrm{H}^1(I)$? $\mathrm{C}^0(\overline{I})$? $\mathrm{H}^2(I)$? $\mathrm{C}^1(\overline{I})$?

c) Montrer pour tout $v \in \mathrm{H}^3(I)$ que $\|v - \Pi_h^2 v\|_{0,I} \le h^3\|v^{(3)}\|_{0,I}$ et $\|(v - \Pi_h^2 v)'\|_{0,I} \le h^2\|v^{(3)}\|_{0,I}$.

Ex3. Etant donnés $I = (0,1)$, $f \in \mathrm{H}^1(I)$ et $c \in \mathrm{H}^1(I)$ telle que $c(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, on considère le système :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in \overline{I}, & (84) \\ u(0) = u(1) = 0. & (85) \end{cases}$$

a) Prouver que toute fonction $u \in \mathrm{H}^3(I)$ satisfaisant (84)-(85) est caractérisée par :

$$u \in \mathrm{H}_0^1(I) \text{ et } \int_I (u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_I f(x)v(x)dx, \ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(I). \quad (86)$$

b) En déduire que (84)-(85) admet une unique solution $u \in \mathrm{H}^3(I)$.

c) Reprenant les notations de l'**Ex2**, on définit $V_{0,h}^2 = \{v \in V_h^2, \ v(0) = v(1) = 0\}$. Quelle est la dimension de $V_{0,h}^2$? Déterminer une base de cet espace.

d) Soit u_h la solution du problème variationnel discret

$$u_h \in V_{0,h}^2 \text{ satisfait } \int_I (u_h'(x)v_h'(x) + c(x)u_h(x)v_h(x))dx = \int_I f(x)v_h(x)dx, \ \forall v_h \in V_{0,h}^2, \quad (87)$$

qui associé à (86). Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de u ainsi que de la partition de I considérée, telle que $\|(u - u_h)'\|_{0,I} \leq Ch^2 \|u^{(3)}\|_{0,I}$.

Ex4. Soient $I = (0,1)$, $f \in \mathrm{L}^2(I)$ et $\chi, c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ telles que

$$\chi(x) \geq \alpha > 0, \ c(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in I.$$

On considère le système :

$$\begin{cases} -(\chi u')'(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in \overline{I}, & (88) \\ u(0) = u(1) = 0. & (89) \end{cases}$$

a) Prouver si $u \in \mathrm{H}^1(I)$ satisfait (88)-(89) alors elle est solution du problème variationnel :

$$u \in \mathrm{H}_0^1(I) \text{ et } \int_I (\chi(x)u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx = \int_I f(x)v(x)dx, \ \forall v \in \mathrm{H}_0^1(I). \quad (90)$$

b) Vérifier que (90) admet une unique solution.

c) Montrer que si l'on suppose $\chi \in \mathrm{C}^\infty(I)$ alors $u \in \mathrm{H}^2(I)$ est solution de (88)-(89) si et seulement si u est solution de (90).

d) Soient $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/(N+1)$, $x_i = ih$ pour $0 \leq i \leq N+1$ et

$$V_{0,h}^1 = \{v \in \mathrm{C}^0(\overline{I}), \ v(0) = v(1) = 0, \ v_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \ 0 \leq i \leq N\}.$$

Montrer qu'il existe une unique solution u_h du problème variationnel discret

$$u_h \in V_{0,h}^1 \text{ et } \int_I (\chi(x)u_h'(x)v_h'(x) + c(x)u_h(x)v_h(x))dx = \int_I f(x)v_h(x)dx, \ \forall v_h \in V_{0,h}^1. \quad (91)$$

e) Montrer enfin qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de u, telle que $\|u - u_h\|_{1,I} \leq Ch\|u''\|_{0,I}$ dès que $u \in \mathrm{H}^2(I) \cap \mathrm{H}^1_0(I)$.

f) Soient pour $j = 1, \ldots, N$,

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 - |x - x_j|/h & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifier que $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ est une base de $V^1_{0,h}$ et pour tout $u_h \in V^1_{0,h}$ que $u_h = \sum_{j=1}^N u_j\varphi_j$ où $u_j = u_h(x_j)$, $1 \leq j \leq N$.

g) Montrer que si u_h est solution de (91) alors les $(u_j)_{1\leq j\leq N}$ sont solutions du système linéaire

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_I (\chi(x)\varphi'_j(x)\varphi'_i(x) + c(x)\varphi_j(x)\varphi_i(x))dx \right) u_j = \int_I f(x)\varphi_i(x)dx, \ 1 \leq i \leq N. \tag{92}$$

h) Détailler l'expression de la matrice de rigidité A_h et du second membre du système (92) en fonction de h et des coefficients $\chi_{i+1/2} = (1/h) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \chi(x)dx$,

$$\begin{cases} c^-_{i+1/2} &= (3/h^3) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)^2 c(x)dx, \\ c_{i+1/2} &= (6/h^3) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)(x - x_i)c(x)dx, \\ c^+_{i+1/2} &= (3/h^3) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 c(x)dx, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} f^-_{i+1/2} &= (2/h^2) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x)dx, \\ f^+_{i+1/2} &= (2/h^2) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)f(x)dx. \end{cases}$$

i) Donner l'expression simplifiée de ce système lorsque χ et c sont constantes sur I.

Ex5. Soient $I = (0, 1)$, $f \in \mathrm{L}^2(I)$, $\chi \in \mathrm{C}^\infty(\overline{I})$, $c \in \mathrm{L}^\infty(I)$ avec

$$\chi(x) \geq \alpha > 0, \ c(x) \geq 0 \text{ p.p. } x \in I.$$

On considère ensuite le système

$$\begin{cases} -(\chi u')'(x) + c(x)u(x) = f(x), \ x \in \overline{I}, & (93) \\ u(0) = 0, \ u'(1) + \tau u(1) = 0, & (94) \end{cases}$$

où $\tau \in \mathbb{R}_+$.

a) Prouver que si $u \in \mathrm{H}^2(I)$ satisfait (93)-(94) alors elle est solution d'un problème variationnel que l'on précisera, et qui possède une unique solution dans un espace de Hilbert approprié V.

b) Montrer réciproquement que la solution du problème variationnel ci-dessus est une solution $\mathrm{H}^2(I)$ de (93)-(94).

c) Soit V_h l'espace d'approximation de type $\mathbb{P}_1$ associé à V. Décrire une base de V_h et préciser le problème variationnel discret associé à (93)-(94). Adapter ensuite l'analyse effectuée à l'**Ex4** pour obtenir une solution approchée u_h de u.

Ex6. On considère le problème

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x),\ x \in \overline{I}, & (95) \\ u(0) = u(1) = 0, & (96) \end{cases}$$

avec $I = (0, 1)$ et $f \in \mathrm{L}^2(I)$.

a) Montrer que (95)-(96) admet une unique solution $u \in \mathrm{H}^2(I)$ caractérisée par

$$u \in V = \mathrm{H}_0^1(I) \text{ et } a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx = L(v),\ \forall v \in V.$$

b) Soit $V_h = \{v \in \mathrm{C}^0(\overline{I}),\ v(0) = v(1) = 0,\ v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1,\ 0 \leq i \leq N\}$ l'espace d'approximation associé à la partition (pour l'instant quelconque) $\sigma_I = \{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, et soit u_h l'unique solution du problème variationnel discret

$$u_h \in V_h,\ a(u_h, v_h) = L(v_h),\ \forall v_h \in V_h.$$

Montrer que l'on a $a(u - u_h, v_h) = 0$ et $a(u - u_h, u - u_h) = a(u - v_h, u - v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$.

c) En appliquant l'inégalité précédente à $v_h = \Pi_h u$, où Π_h désigne l'opérateur de projection sur V_h, et en remarquant que $\|(u-\Pi_h u)'\|^2_{0,(x_i,x_{i+1})} \leq (x_{i+1}-x_i)^2\|u''\|^2_{0,(x_i,x_{i+1})}$ pour tout $0 \leq i \leq N$, montrer que $\|(u-u_h)'\|_{0,I} \leq h\|f\|_{0,I}$ où $h = \max_{0\leq i\leq N}(x_{i+1}-x_i)$. En déduire que $|(u - u_h)(x)| \leq \sqrt{x}h\|f\|_{0,I}$ pour tout $x \in \overline{I}$.

d) On suppose désormais que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 - \beta, \\ 1/(2\beta) & \text{si } 1/2 - \beta \leq x \leq 1/2 + \beta, \\ 0 & \text{si } x > 1/2 + \beta, \end{cases}$$

où $\beta \in (0, 1/2)$ est fixé. Vérifier à partir de ce qui précède que $\|(u - u_h)'\|_{0,I} \leq h/\sqrt{2\beta}$ puis calculer u en fonction de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

e) En remarquant que $\|u'\|^2_{0,I} = 1/4 - \beta/3$, montrer dans le cas où la partition σ_I est choisie uniforme (i.e. $h = 1/(N + 1)$ et $x_i = ih$ pour tout $0 \leq i \leq N + 1$) que l'erreur relative

$$\frac{\|(u - u_h)'\|_{0,I}}{\|u'\|_{0,I}} \leq \frac{\sqrt{6/\beta}}{N + 1}.$$

f) Considérons maintenant la partition $\{x_i\}_{i=0}^{N+1}$ de I où $x_0 = 0$, $x_i = 1/2 - \beta + 2(i - 1)\beta/(N - 1)$ pour $1 \leq i \leq N$, et $x_{N+1} = 1$.

   i) Montrer à l'aide d'un raisonnement analogue à celui de la question c) que

$$\begin{cases} \|(u - \Pi_h u)'\|_{0,(x_0,x_1)} = \|(u - \Pi_h u)'\|_{0,(x_N,x_{N+1})} = 0, \\ \|(u - \Pi_h u)'\|^2_{0,(x_i,x_{i+1})} \leq (2\beta)/(N - 1)^3 \text{ si } 1 \leq i \leq N. \end{cases}$$

   ii) En appliquant ensuite la seconde égalité de la question b) à $v_h = \Pi_h u$, déduire du i) que

$$\frac{\|(u - u_h)'\|_{0,I}}{\|u'\|_{0,I}} \leq \frac{\sqrt{24\beta}}{N - 1}.$$

g) Comparer les résultats des questions e) et f) lorsque β tend vers 0. Conclure.

Ex7. (Examen partiel de novembre 2010).
Etant donnés $I = (0,1)$ et $f \in \mathrm{L}^2(I)$, on considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } I, & (97) \\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1). & (98) \end{cases}$$

Dans tout le problème $\|.\|_{0,I}$ désigne la norme usuelle de $\mathrm{L}^2(I)$, et $\|.\|_{1,I}$ celle de $\mathrm{H}^1(I)$.

1) Justifier que $V = \{v \in \mathrm{H}^1(I),\ v(0) = v(1)\}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $\mathrm{H}^1(I)$.
2) Montrer $u \in \mathrm{H}^2(I)$ est solution de (97)-(98)si et seulement si $u \in V$ satisfait :

$$\int_0^1 (u'(x)v'(x) + u(x)v(x))dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx,\ \forall v \in V. \tag{99}$$

3) Prouver qu'il existe un unique $u \in V$ satisfaisant (99).
4) Vérifier que si $f \in \mathrm{H}^1(I)$ alors u est solution de (97)-(98) au sens de la dérivation usuelle.
5) Soit $\mathbb{P}_1$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 1 sur $\mathbb{R}$. Pour une partition donnée $\sigma_I = \{x_i\}_{i=0}^{N+1}$, $N \in \mathbb{N}^*$, de I, dont le pas est h, on note $K_i = (x_i, x_{i+1})$, $0 \le i \le N$, et l'on considère l'espace d'approximation

$$V_h = \{v \in \mathrm{C}^0(I),\ v(0) = v(1),\ v_{|K_i} \in \mathbb{P}_1,\ 0 \le i \le N\}.$$

   a) Quelle est la dimension de V_h ? Donner une base de V_h et préciser l'opérateur de projection Π_h de V sur V_h.
   b) Montrer pour tout $v \in \mathrm{H}^2(I)$ que l'on a $\|(v - \Pi_h v)'\|_{0,I} \le h\|v''\|_{0,I}$ et $\|v - \Pi_h v\|_{0,I} \le h^2\|v''\|_{0,I}$.
   c) Vérifier ensuite que $V_h \subset V$.
   d) Expliquer brièvement pourquoi il existe une unique solution $u_h \in V_h$ satisfaisant

$$\int_0^1 (u_h'(x)v_h'(x) + u_h(x)v_h(x))dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx,\ \forall v_h \in V_h. \tag{100}$$

6) Soit u l'unique solution de (97)-(98) et u_h celle que (100).
   a) Montrer que $\|u'\|_{1,I} \le \|f\|_{0,I}$.
   b) Prouver enfin que $\|u - u_h\|_{1,I} \le 2h\|f\|_{0,I}$.

4.3.2 Solution de l'Ex7

1) Pour tout $x \in \overline{I}$, l'application $v \mapsto v(x)$ est continue de $\mathrm{H}^1(I)$ dans $\mathbb{R}$. Par suite $\theta : v \mapsto v(1) - v(0)$ l'est également. Comme V est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par θ, c'est un sev fermé de $\mathrm{H}^1(I)$. Ainsi V est complet puisque $\mathrm{H}^1(I)$ est un espace de Hilbert, ce qui garantit le résultat.

2) En multipliant les deux membres de (84) par $v \in V$ et en intégrant le résultat obtenu sur I (en tenant compte du fait que $\int_I u''v dx = -\int_I u'v'dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = -\int_I u'v'dx$ puisque $v(0) = v(1)$ et $u'(0) = u'(1)$), on obtient facilement (86). La réciproque s'obtient en écrivant (86) pour $v = \varphi \in D(I) \subset V$. On obtient alors que $\langle -u'' + u, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$, pour tout $\varphi \in D(I)$, ce qui implique $-u'' + u = f$ dans $D'(I)$. Comme $f \in \mathrm{L}^2(I)$ cette égalité a donc lieu presque partout dans I, et (84) est donc bien satisfaite. Or, on a montré plus haut que (84) entraîne $\int_I u'v'dx + \int_I uv dx = \int_I fv dx + u'(1)v(1) - u'(0)v(0)$ pour tout $v \in V$. En comparant cette identité à (86) on voit donc que $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$ pour tout $v \in V$. En particulier, pour $v = 1$ (il s'agit de la fonction constante égale à 1 sur I, qui est bien un élément de V), cela donne $u'(1) - u'(0) = 0$, ce qui prouve (85).
3) Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram, ce qui est licite puisqu'on a vu que V était bien un espace de Hilbert, et qu'il est évident que $(u, v) \mapsto a(u, v) := \int_I (u'v' + uv)dx$ est V-elliptique (en effet $a(u, u) = \|u\|^2_{1,I}$ pour tout $u \in V$).
4) Comme $u \in \mathrm{H}^2(I)$ et que $f \in \mathrm{H}^1(I)$, on a $u'' \in \mathrm{H}^1(I)$ en vertu de (84). Ceci implique $u \in \mathrm{H}^3(I)$. Le résultat est alors une conséquence de l'inclusion $\mathrm{H}^3(I) \subset \mathrm{C}^2(I)$ car la dérivation usuelle coïncide avec la dérivée distribution pour les fonctions de classe C^1.
5) a) C'est $N + 1$ vu qu'il y a $N + 1$ intervalles K_i avec deux degrés de liberté pour chacun d'entre eux, auxquels il faut soustraire N conditions de raccord continu aux points $x_1, \dots, x_N$, ainsi que la condition au bord $u(0) = u(1)$. Au final $2(N + 1) - N - 1 = N + 1$. Une base de V_h est $\{\varphi, \varphi_i, 1 \le i \le N\}$ où l'on a posé :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x \in K_i \\ 1 - \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in K_{i-1}, 1 \le i \le N, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \text{ et } \varphi(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1-x}{1-x_N} & \text{si } x \in K_N \\ 1 - \frac{x}{x_1} & \text{si } x \in K_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut remarquer que $\varphi = \varphi_0 + \varphi_{N+1}$, où φ_0 et φ_{N+1} sont les fonctions "chapeau" suivantes :

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{x_1} & \text{si } x \in K_0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} , \varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1-x}{1-x_N} & \text{si } x \in K_N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'opérateur de projection Π_h de V sur V_h est alors celui qui associe à tout $v \in V$ la fonction suivante :

$$\Pi_h v = v(0)\varphi + \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\varphi_i.$$

b) Il suffit de recopier ce qui a été fait en cours. Pour chaque $i = 0, \dots, N$, la fonction $w = (v - \Pi_h v)' \in \mathrm{C}^0(K_i)$ et satisfait $\int_{K_i} w dx = 0$. Par suite il existe $y_i \in K_i$ tel que $w(y_i) = 0$, ce qui permet d'écrire que

$$w(x) = \int_{y_i}^{x} w' dx = \int_{y_i}^{x} v'' dx, \; x \in K_i.$$

De la on a facilement via l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $|w(x)| \le |x - y_i|^{1/2}\|v''\|_{0,K_i}$ pour tout $x \in K_i$, et donc que $\|w\|^2_{0,K_i} \le h^2\|v''\|^2_{0,K_i}$. Le reste de la démonstration ne pose pas de problème.

c) Il suffit pour cela de montrer que $V_h \subset \mathrm{H}^1(I)$. Or on a déjà vu en cours que les fonctions φ_i, $i = 0, \ldots, N+1$, sont des fonctions de $\mathrm{H}^1(I)$. Comme $v = v(0)\varphi + \sum_{i=1}^{N} v(x_i)\varphi_i$ pour tout $v \in V_h$ d'après le a), le résultat s'en déduit.

d) V_h est un sous espace de dimension finie de V, donc il est fermé. Comme V est un espace de Hilbert, V_h est donc complet, et c'est donc un espace de Hilbert. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram pour le problème discret aussi.

6) a) Multiplions (84) par u''. Comme $u'' \in \mathrm{L}^2(I)$, les deux membres de l'égalité obtenue sont dans $\mathrm{L}^1(I)$, et il vient

$$-\|u''\|_{0,I}^2 + \int_I uu''dx = \int_I fu''dx,$$

en intégrant sur I. Comme u et u' sont dans $\mathrm{H}^1(I)$ on trouve facilement que $\int_I uu''dx = -\|u'\|_{0,I}^2 + u(1)u'(1) - u(0)u'(0)$ en intégrant par parties. Comme $u(1)u'(1) - u(0)u'(0) = 0$ d'après (85), on voit donc que

$$\|u''\|_{0,I}^2 + \|u'\|_{0,I}^2 = -\int_I fu''dx,$$

ce qui entraîne $\|u''\|_{0,I}^2 + \|u'\|_{0,I}^2 \leq \|f\|_{0,I}\|u''\|_{0,I}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par suite $\|u''\|_{0,I}^2 + \|u'\|_{0,I}^2 \leq (\|f\|_{0,I}^2 + \|u''\|_{0,I}^2)/2$ en vertu de la majoration bien connue $ab \leq (a^2+b^2)/2$, et donc $2\|u'\|_{0,I}^2 + \|u''\|_{0,I}^2 \leq \|f\|_{0,I}^2$. Comme $\|u'\|_{0,I}^2 = \|u'\|_{0,I}^2 + \|u''\|_{0,I}^2$, le résultat s'en déduit immédiatement

b) On applique le raisonnement fait en cours, ce qui permet de montrer que $\|u - u_h\|_{1,I} \leq 2h\|u''\|_{0,I}$. En effet on a $a(u,v) = L(v) := \int_I uvdx$ pour tout $v \in V$ d'une part, et $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v \in V_h$ d'autre part. Comme $V_h \subset V$, on peut donc écrire que $a(u, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$, ce qui implique $a(u - u_h, v_h) = 0$ pour tout $v_h \in V_h$. Or,

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{1,I}^2 = a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \\
&= a(u - u_h, u - v_h),\ v_h \in V_h,
\end{aligned}$$

d'après ce qui précède. En particulier, pour $v_h = \Pi_h u \in V_h$, l'égalité précédente combinée à celle de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{1,I}^2 &= a(u - u_h, u - \Pi_h u) \\
&\leq \|(u - u_h)'\|_{0,I}\|(u - \Pi_h u)'\|_{0,I} + \|u - u_h\|_{0,I}\|u - \Pi_h u\|_{0,I} \\
&\leq \frac{1}{2}(\|u - u_h\|_{1,I}^2 + \|u - \Pi_h u\|_{1,I}^2).
\end{aligned}$$

Par suite $\|u - u_h\|_{1,I}^2 \leq \|u - \Pi_h u\|_{1,I}^2 \leq h^2(1+h^2)\|u''\|_{0,I}^2 \leq 2h^2\|u''\|_{0,I}^2$. Il suffit alors de majorer $\|u''\|_{0,I} \leq \|u'\|_{1,I}$ par $\|f\|_{0,I}$ et c'est fini.

5 Problèmes aux limites elliptiques en dimension ≥ 2

Dans tout cette partie, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, de point générique $x = (x_1, \ldots, x_N)$.

5.1 Un peu d'analyse fonctionnelle et de calcul différentiel en dimension ≥ 2

5.1.1 L' espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$

Définition. Toute fonction $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ est une distribution (régulière) sur Ω, de sorte que l'on peut définir ses dérivées partielles $\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$, dans $D'(\Omega)$. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω, l'espace :

$$\mathrm{H}^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \partial_i u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ 1 \leq i \leq N\}.$$

En notant $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \ldots, \partial_N u)^T \in D'(\Omega)^N$, le gradient de u, il est évidemment équivalent de poser $\mathrm{H}^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N\}$.
En raisonnant comme dans le cas de la dimension 1, on obtient facilement le :

Théorème 32. $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire*

$$\begin{aligned}(u,v)_{1,\Omega} &= (u,v)_{0,\Omega} + (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} \\ &= \int_\Omega u(x)v(x)dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \partial_i u(x)\partial_i v(x)dx,\ u,v \in \mathrm{H}^1(\Omega).\end{aligned}$$

L'espace $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$. On note $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Bien que $D(\Omega)$ soit dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, on verra (voir remarque 36) que $D(\Omega)$ n'est en général pas dense dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, et donc que $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est en général un sous-espace strict de $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

Théorème 33 (inégalité de Poincaré)**.** *Si Ω est borné alors il existe une constante $C(\Omega) > 0$ (ne dépendant que de Ω) telle que*

$$\|u\|_{0,\Omega} \leq C\|\nabla u\|_{0,\Omega},\ \forall u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega).$$

Démonstration.
Soit $u \in D(\Omega)$. On pose

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme Ω est supposé borné il existe deux réels $a < b$ tels que $x_N \in [a,b]$ pour tout $x \in \Omega$. Ensuite, pour tout $x = (x', x_N)$, $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$, de $\mathbb{R}^N$, on a

$$\tilde{u}(x', x_N) = \int_a^{x_N} \partial_N \tilde{v}(x', t)dt,$$

ce qui implique

$$|\tilde{u}(x', x_N)| \leq |x_N - a|^{1/2} \left(\int_a^{x_N} |\partial_N \tilde{v}(x',t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq |x_N - a|^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_N \tilde{v}(x',t)|^2 dt\right)^{1/2}, \tag{101}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En élevant au carré et en intégrant par rapport à $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ dans les deux membres de (101), il vient

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{u}(x', x_N)|^2 dx' \leq |x_N - a| \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_N \tilde{v}(x)|^2 dx,$$

ce qui entraîne ensuite

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}(x)|^2 dx = \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{u}(x', x_N)|^2 dx' \right) dx_N \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_N \tilde{v}(x)|^2 dx.$$

Nous avons donc obtenu que

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|\partial_N v\|_{0,\Omega} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|\nabla v\|_{0,\Omega}, \ v \in D(\Omega),$$

ce qui, par densité de $D(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, implique le résultat. □

Remarque 34. *La démonstration précédente montre qu'il suffit en fait que l'ouvert Ω soit borné dans une direction pour que l'inégalité de Poincaré ait lieu.*

Corollaire 35. *Si Ω est borné alors $|u|_{1,\Omega} = \|\nabla u\|_{0,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^N \|\partial_i u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, qui est équivalente à $\|u\|_{1,\Omega}$.*

Remarque 36. *Si Ω est borné, la fonction u telle que $u(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$, appartient à $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Mais comme elle ne satisfait pas l'inégalité de Poincaré, elle n'appartient pas à $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$. Ceci montre que $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est un sous-espace strict de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ lorsque Ω est borné.*

5.1.2 Densité et théorème de trace

Le cas de $\mathbb{R}_+^N$. Commençons par examiner le cas simple où $\Omega = \mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N, \ x_n > 0\}$. Dans ce cas précis, on démontre, comme cela a déjà été fait pour $\mathbb{R}$ en précédant par troncature et régularisation, que

$$D(\overline{\mathbb{R}_+^N}) = \{u_{|\mathbb{R}_+^N}, \ u \in D(\mathbb{R}^N)\} \text{ est dense dans } \mathrm{H}^1(\mathbb{R}_+^N). \tag{102}$$

De plus, on a

$$\|u(.,0)\|_{0,\mathbb{R}^{N-1}} \leq \|u\|_{1,\mathbb{R}_+^N}, \ u \in D(\overline{\mathbb{R}_+^N}). \tag{103}$$

En effet, pour tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ on a

$$\begin{aligned} u(x',0)^2 &= -2 \int_0^\infty u(x', x_N) \partial_N u(x', x_N) dx_N \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} |u(x', x_N)||\partial_N u(x', x_N)| dx_N \\ &\leq \int_0^{+\infty} (u(x', x_N)^2 + \partial_N u(x', x_N)^2) dx_N, \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x',0)^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}^N_+} (u(x)^2 + \partial_N u(x)^2) dx,$$

en intégrant par rapport à $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.
Il résulte de (102)-(103) que l'application linéaire $u \mapsto u(.,0)$, définie de $D(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ dans $D(\mathbb{R}^{N-1})$, se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^N_+)$ and $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{N-1})$, c'est-à-dire de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$, où $\Gamma = \mathbb{R}^{N-1}$ est la frontière de l'ouvert Ω. De plus (103) reste vraie pour $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^N_+)$. Ainsi, dans ce cas particulier, il est possible de définir la valeur au bord $u_{|\Gamma} \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ de n'importe quelle fonction $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, et l'application "trace" correspondante, $u \mapsto u_{|\Gamma}$, est continue de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$.
Nous allons voir maintenant que ce résultat se généralise au cas de n'importe quel ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière Γ est suffisamment régulière.

Cas où Ω est borné, de frontière C^1. Si Ω est borné, on dira que sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est C^1 par morceaux si c'est une variété de dimension $N-1$ de classe C^1 par morceaux, l'ouvert Ω étant situé d'un seul côté de Γ.
Cela signifie qu'il existe un nombre fini d'ouverts bornés $\mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq i \leq I$, tels que :

(a) $\overline{\mathcal{O}_0} \subset \Omega$;

(b) $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1}^I$ est un recouvrement ouvert de $\overline{\Omega}$;

(c) Il existe N C^1-difféomophismes $\psi_i : \mathcal{O}_i \to B = \{x \in \mathbb{R}^N,\ |x| < 1\}$, $1 \leq i \leq N$, satisfaisant
  (i) $\psi_i(\mathcal{O}_i \cap \Omega) = B \cap \mathcal{C}_i$,
  (ii) $\psi_i(\mathcal{O}_i \cap \Gamma) = B \cap \partial\mathcal{C}_i$,

  où $\mathcal{C}_i$ est soit $\mathbb{R}^N_+$, soit un cône ouvert de $\mathbb{R}^N_+$, soit le complémentaire d'un cône fermé de $\mathbb{R}^N_+$.

On dit alors que Γ est défini par le système de cartes locales $\{\mathcal{O}_i, \psi_i\}_{i=1}^I$. On définit de façon similaire la notion d'ouvert de frontière C^m par morceaux, pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 37. *Si Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière C^1 par morceaux alors $D(\overline{\Omega}) = \{u_{|\Omega},\ u \in D(\mathbb{R}^N)\}$ est dense dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, et l'application $u \mapsto \gamma_0 u = u_{|\Gamma}$, de $D(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$, se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma)$, notée γ_0.*

Pour tout $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\gamma_0 u$ s'appelle la trace de u sur Γ, ce qui explique que γ_0 soit appelée application trace. Le fait que γ_0 soit une application continue signifie qu'il existe une constante $\kappa = \kappa(\Omega) > 0$, ne dépendant *a priori* que de Ω, telle que

$$\|\gamma_0 u\|_{0,\Gamma} = \|u\|_{0,\Gamma} \leq \kappa(\Omega)\|u\|_{1,\Omega},\ u \in \mathrm{H}^1(\Omega). \tag{104}$$

Remarquons ensuite, en utilisant la densité de $D(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, que $u_{|\Gamma} = 0$ pour tout $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Ainsi $\mathrm{H}^1_0(\Omega) \subset \ker \gamma_0$. L'inclusion réciproque étant également vraie (mais elle est plus difficile à montrer et sera admise) on a donc la :

Proposition 38. *Si* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *de frontière* C^1 *par morceaux alors* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *est le noyau de* γ_0 *:*

$$\mathrm{H}_0^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ u_{|\Gamma} = 0\}.$$

Remarque 39. γ_0 *n'est pas une surjection de* $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *dans* $\mathrm{L}^2(\Gamma)$*. En fait l'image de* $\mathrm{H}^1(\Omega)$ *par* γ_0 *est égale à* $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ *(c'est un espace de Sobolev d'indice fractionnaire, dont la définition sort des limites de ce cours). C'est un sous-espace strict de* $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ *qui est dense dans* $\mathrm{L}^2(\Gamma)$*.*

Remarque 40. *Au besoin, les hypothèses de régularité faites dans cette section sur la frontière* Γ *de l'ouvert de référence* Ω *afin de définir convenablement l'application trace peuvent en fait être affaiblies, afin de pouvoir traiter le cas d'ouverts à bords "irréguliers". Ce cours ne se voulant en fait qu'une introduction aux problèmes aux limites, il ne vise pas à la plus grande généralité, ce qui explique que nous ne considèrerons dans ce qui suit que des ouverts de frontière* C^1 *par morceaux.*

5.1.3 Formule de Green

L'ouvert Ω étant borné et de frontière C^1 par morceaux, on note ν_i, $1 \le i \le N$, la $i^{\text{ième}}$ composante de la normale unitaire ν à Γ, dirigée vers l'extérieur de Γ (on parle aussi de normale extérieure unitaire à Γ). Evidemment, $\nu \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$.

Théorème 41 (Formule de Green)**.** *Soit* Ω *un ouvert borné de frontière* C^1 *par morceaux. Alors, pour tout* $u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ *on a l'égalité :*

$$\int_\Omega \partial_i u(x) v(x) dx + \int_\Omega u(x) \partial_i v(x) dx = \int_\Gamma u(\sigma) v(\sigma) \nu_i(\sigma) d\sigma,\ 1 \le i \le N.$$

Démonstration.
$D(\overline{\Omega})$ étant dense dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ en vertu du Théorème 37, on se donne deux suites $(u_m)_m$ et $(v_n)_n$ de $D(\overline{\Omega})$, convergeant respectivement vers u et v dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, puis on écrit l'identité

$$\int_\Omega \partial_i u_m(x) v_n(x) dx + \int_\Omega u_m(x) \partial_i v_n(x) dx = \int_\Gamma u_m(\sigma) v_n(\sigma) \nu_i(\sigma) d\sigma,\ 1 \le i \le N,$$

qui est valable pour les fonctions de $D(\overline{\Omega})$. Il suffit ensuite de faire tendre m et n vers l'infini dans cette égalité : le membre de gauche tend évidemment vers $\int_\Omega \partial_i u(x) v(x) dx + \int_\Omega u(x) \partial_i v(x) dx$, et celui de droite vers $\int_\Gamma u(\sigma) v(\sigma) \nu_i(\sigma) d\sigma$, du fait de la continuité de γ_0, qui résulte du Théorème 37. $\square$

Remarque 42. *Comme* $u_{|\Gamma}, v_{|\Gamma} \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ *en vertu du Théorème 37, et que* $\nu \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$*, la fonction* $\sigma \in \Gamma \mapsto u(\sigma) v(\sigma) \nu(\sigma)$ *appartient à* $\mathrm{L}^1(\Gamma)$*, donc l'intégrale du membre de droite dans la formule de Green du Théorème 41 est bien définie.*

Remarque 43. *Si* $u \in (u_1, \ldots, u_N)^T \in \mathrm{H}^1(\Omega)^N$ *et* $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$*, on peut appliquer la formule de Green précédente à* u_i *et* v *pour chaque* $1 \le i \le N$*, puis sommer les égalités obtenues. Cela donne*

$$\int_\Omega \nabla . u(x) v(x) dx + \int_\Omega (u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx = \int_\Gamma (u(\sigma), \nu(\sigma))_{\mathbb{R}^N} v(\sigma) d\sigma,$$

en convenant de noter $(.,.)_{\mathbb{R}^N}$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$ et $\nabla.u = \sum_{i=1}^N \partial_i u_i$ la divergence de u. En préférant la notation $f.g$ à $(f,g)_{\mathbb{R}^N}$, la formule précédente se réécrit sous la forme suivante, également appelée formlule de Green (ou formule de Green vectorielle si l'on tient à marquer la différence avec la formule du Théorème 41) :

$$\int_\Omega \nabla.u(x)v(x)dx + \int_\Omega u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Gamma u(\sigma).\nu(\sigma)v(\sigma)d\sigma. \tag{105}$$

Une conséquence importante de la formule de Green pour la suite de ce cours (et en particulier lors de la construction des espaces d'approximation utilisés dans les méthodes de type éléments finis) est le :

Corollaire 44. *Soit $\overline{\Omega} = \cup_{j=1}^J \overline{\Omega_j}$ une décomposition finie de $\overline{\Omega}$ telle que :*

(a) $\Omega_j \subset \Omega$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière Γ_j est C^1 par morceaux, $1 \leq j \leq J$;

(b) $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$, $1 \leq j \neq k \leq J$.

Alors, on a l'implication suivante :

$$\Big(u \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ et } u_{|\Omega_j} \in \mathrm{H}^1(\Omega_j),\ 1 \leq j \leq J\Big) \Rightarrow u \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

Démonstration.
Posons

$$(u_i)_{|\Omega_j} = \partial_i(u_{|\Omega_j}),\ 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq J,$$

et vérifions que $u_i = \partial_i u$ dans $D'(\Omega)$ pour chaque $1 \leq i \leq N$. En effet, pour toute fonction $\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$\langle u_i, \varphi\rangle = \int_\Omega u_i(x)\varphi(x)dx = \sum_{j=1}^J \int_{\Omega_j} \partial_i u(x)\varphi(x)dx,$$

car $u_i \in \mathrm{L}^2(\Omega$, ce qui donne

$$\langle u_i, \varphi\rangle = -\sum_{j=1}^J \int_{\Omega_j} u(x)\partial_i\varphi(x)dx + \sum_{j=1}^J \int_{\Gamma_j} u(\sigma)\varphi(\sigma)\nu_i^{(j)}d\sigma,$$

par application de la formule de Green sur chacun des ouverts Ω_j, la normale unitaire extérieure à Γ_j étant notée $\nu^{(j)}$. Comme v est continue sur Ω et que $\varphi_{|\Gamma} = 0$, il vient

$$\sum_{j=1}^J \int_{\Gamma_j} u(\sigma)\varphi(\sigma)\nu_i^{(j)}d\sigma = 0,$$

de sorte que

$$\langle u_i, \varphi\rangle = -\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\langle u, \partial_i\varphi\rangle,$$

puisue $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Par suite nous avons bien $\partial_i u = u_i$ au sens des distributions pour tout $1 \leq i \leq N$. Comme u_i appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega)$, cela montre que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. □

5.1.4 Espaces de Sobolev d'ordres supérieurs

Définition. Pour tout $m \geq 1$, on appelle espace de Sobolev d'ordre m sur Ω, l'espace

$$\mathrm{H}^m(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \partial^\alpha u \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\},$$

où l'on rappelle que $\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}$ et $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$. Comme dans le cas $m = 1$, on vérifie sans difficulté que $\mathrm{H}^m(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

est un espace de Hilbert séparable.

Remarque 45. *Si Ω est un ouvert borné de classe C^m par morceaux, alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $\mathrm{H}^m(\Omega)$. Lorsque $m \geq 2$, ce résultat peut tomber en défaut pour des ouverts Ω qui sont seulement de classe C^{m-1}.*

L'espace $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Le cas qui retiendra plus particulièrement notre attention dans la suite de ce cours est celui correspondant à $m = 2$. Précisons à partir de la définition précédente que

$$\mathrm{H}^2(\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \partial_i u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ 1 \leq i \leq N\}. \tag{106}$$

Considérons maintenant $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, où Ω est supposé borné et de frontière C^1 par morceaux. Comme $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ on a $u_{|\Gamma} = \gamma_0 u \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ grâce au Théorème 37. De même, $\partial_i u$ étant dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ d'après (106), $(\partial_i u)_{|\Gamma} \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ pour chaque $1 \leq i \leq N$. Par suite $(\partial_i u)_{|\Gamma} \nu_i \in \mathrm{L}^2(\Gamma)$ car $\nu_i \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$, et donc la dérivée normale

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{|\Gamma} = (\partial_\nu u)_{|\Gamma} = \sum_{i=1}^N (\partial_i u)_{|\Gamma} \nu_i,$$

est une fonction de $\mathrm{L}^2(\Gamma)$. Nous avons ainsi démontré le :

Théorème 46. *Si Ω est borné et de frontière C^1 par morceaux alors l'application $u \mapsto (\gamma_0 u, \gamma_1 u) = (u_{|\Gamma}, (\partial_\nu u)_{|\Gamma})$ définie de $D(\overline{\Omega})$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma)$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathrm{H}^2(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma)$.*

Corollaire 47 (Formule de Stokes)**.** *Soit Ω est borné et de frontière C^1 par morceaux. Alors pour tout $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) v(\sigma) d\sigma,$$

où $\Delta u = \nabla.\nabla u = \sum_{i=1}^N \partial_i^2 u$ désigne le Laplacien de u.

Démonstration.
Comme $\nabla u \in \mathrm{H}^1(\Omega)^N$ puisque $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, et que $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, il suffit d'appliquer la formule de Green (105) directement à ∇u et v. $\square$

Continuité. Il a été établi dans le cas monodimensionnel (i.e. le cas $N = 1$) que $\mathrm{H}^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $\mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$. Dans le cas où N est quelconque, ce résultat se généralise (la démonstration est similaire) comme suit :

Théorème 48. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière C^1 par morceaux. Si $m > N/2$ alors $\mathrm{H}^m(\Omega) \subset \mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$, et il existe une constante $C = C(m, \Omega) > 0$ (ne dépendant que de m et Ω) telle que*

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq C \|u\|_{m,\Omega}.$$

Corollaire 49. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière C^1 par morceaux et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$m > k + \frac{N}{2} \Rightarrow \mathrm{H}^m(\Omega) \subset \mathrm{C}^k(\overline{\Omega}).$$

5.1.5 L'espace $\mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega)$

Définition et propriétés essentielles. Revenons un instant sur la formule de Green (105). Elle a été établie pour tout $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)^N$ et $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Or, v étant toujours pris dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, on remarque que les deux intégrales du membre de gauche de (105) ont un sens dès que $u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N$ et $\nabla.u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, ce qui est visiblement plus faible que de requérir $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)^N$. Ceci nous amène à introduire l'espace

$$\mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^N,\ \nabla.u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\},$$

qui est un un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)} = (u, v)_{0,\Omega} + (\nabla.u, \nabla.v)_{0,\Omega}.$$

On note $\mathrm{H}_0(\mathrm{div}; \Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $\mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega)$ et l'on vérifie ensuite (voir [4][Théorème IX A.1.1]) que :

Théorème 50. *Si Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière Γ est C^1 par morceaux, alors on a :*

(a) $D(\overline{\Omega})^N$ est dense dans $\mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega)$;

(b) L'application trace $\gamma_\nu : u \mapsto (u.\nu)_{|\Gamma}$ définie sur $D(\overline{\Omega})^N$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée γ_ν, de $\mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega)$ sur $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, ce dernier espace désignant l'espace dual de $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(\mathrm{H}^1(\Omega))$;

(c) $\ker \gamma_\nu = \mathrm{H}_0(\mathrm{div}; \Omega)$.

En combinant les points (a) et (b) du Théorème 50, c'est-à-dire la densité de $D(\overline{\Omega})^N$ dans $\mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega)$ à la continuité de l'application trace γ_ν, on obtient ensuite facilement la formule de Green généralisée :

$$\int_\Omega \nabla.u(x) v(x) dx + \int_\Omega u(x).\nabla v(x) dx = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 v \rangle,\ u \in \mathrm{H}(\mathrm{div}; \Omega),\ v \in \mathrm{H}^1(\Omega), \quad (107)$$

où le crochet $\langle ., . \rangle$ désigne la dualité $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$. Par abus de langage, on notera parfois

$$\langle \gamma_\nu u, \gamma_0 v \rangle = \int_\Gamma u(\sigma).\nu(\sigma) v(\sigma) d\sigma,$$

dans la suite, bien qu'en général, l'application $\sigma \mapsto u(\sigma).\nu(\sigma)v(\sigma)$ ne soit pas une fonction intégrable sur Γ.

L'espace $\mathrm{H}(\Delta;\Omega)$ **et formule de Stokes généralisée.** De la même façon que $\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ s'introduit naturellement à partir de la formule de Green (105), on va définir l'espace $\mathrm{H}(\Delta;\Omega)$ à partir de la formule de Stokes du Corollaire 47. En effet, cette égalité a été démontrée pour $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, mais, v étant toujours pris dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, il est suffisant de supposer $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et $\Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ pour que chacune des deux intégrales du membre de gauche soient bien définies. C'est pourquoi on pose :

$$\mathrm{H}(\Delta;\Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\} = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)\}.$$

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ dont la frontière Γ est C^1 par morceaux, on obtient alors la formule de Stokes généralisée suivante

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx + \int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \langle \gamma_\nu(\nabla u), \gamma_0 v\rangle,\ u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega),\ v \in \mathrm{H}^1(\Omega), \tag{108}$$

en appliquant directement la formule de Green généralisée (107) à $\nabla u \in \mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega)$ et à $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. De la même façon que dans (107), on notera parfois par abus de langage $\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)v(\sigma)d\sigma$ dans (108) à la place de $\langle \gamma_\nu(\nabla u), \gamma_0 v\rangle$.

5.2 L'équation de Laplace en dimension ≥ 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, dont la frontière Γ est C^1 par morceaux. Etant donnés $c \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, on va d'abord considérer le problème aux limites elliptiques avec *conditions au bord homogènes de type Dirichlet* : trouver u satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f \text{ dans } \Omega & (109)\\ u = 0 \text{ sur } \Gamma. & (110)\end{cases}$$

On traitera ensuite le même problème, mais avec des *conditions au bord homogènes de type Neumann.* Il s'agira cette fois de trouver u satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f \text{ dans } \Omega & (111)\\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma. & (112)\end{cases}$$

5.2.1 Conditions au bord homogènes de type Dirichlet

Formulation variationnelle. Si u est suffisamment régulière, par exemple si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors en multipliant (109) par $v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, il vient

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \tag{113}$$

grâce à la formule de Stokes du Corollaire 47 combinée à l'égalité $v_{|\Gamma} = 0$, qui résulte de la Proposition 38. L'équation (113) est la formulation variationnelle de (109)-(110). Elle a un sens dès que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Comme (110) entraîne $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, en vertu de la Proposition 38, on va donc associer à (109)-(110) le problème par le problème variationnel suivant :

$$(\mathcal{P}_\Omega) \quad \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega) \text{ vérifiant (113).}$$

On vient donc de voir que si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ est solution de (109)-(110) alors u est solution de $(\mathcal{P}_\Omega)$. Réciproquement si u est solution de $(\mathcal{P}_\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla\varphi(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_I f(x)\varphi(x)dx,\ \forall\varphi \in D(\Omega),$$

car $D(\Omega) \subset \mathrm{H}^1_0(\Omega)$. Ce qui signifie que $\langle -\Delta u + cu, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, et donc $-\Delta u + cu = f$ dans $D'(\Omega)$. Or $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ donc l'égalité précédente a lieu dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et (109) est satisfaite presque partout dans Ω. De plus $\Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ donc $u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega)$ et Enfin $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ entraîne (110) grâce à la Proposition 38.
En résumé, nous avons montré que :

(a) Toute solution $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ de (109)-(110) est solution du problème variationnel $(\mathcal{P}_\Omega)$;

(b) Toute solution du problème variationnel $(\mathcal{P}_\Omega)$ est une solution $\mathrm{H}(\Delta;\Omega)$ de (109)-(110).

Pour montrer que les problèmes (109)-(110) et $(\mathcal{P}_\Omega)$ sont équivalents il faudrait en fait montrer que que l'implication (a) reste vraie pour tout $u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega)$ (et non plus dans $\mathrm{H}^2(\Omega)$). Il suffit en fait pour cela d'appliquer la formule de Stokes généralisée (108) à la place de celle du Corollaire 47 dans la dérivation de (113). On obtient alors l'équivalence

$$u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega) \text{ est solution de } (109)-(110) \Leftrightarrow u \text{ est solution de } (\mathcal{P}_\Omega). \tag{114}$$

Existence et unicité de la solution du problème variationnel. Le problème $(\mathcal{P}_\Omega)$ peut se reformuler sous la forme équivalente suivante :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ satisfaisant } a(u,v) = L(v),\ \forall v \in V,$$

où $V = \mathrm{H}^1_0(I)$, $a(u,v) = \int_\Omega(\nabla u(x).\nabla v(x) + c(x)u(x)v(x))dx$ et $L(v) = \int_\Omega f(x)v(x)dx$. De plus, on vérifie facilement que la forme bilinéaire symétrique a est continue sur $V \times V$,

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{0,\Omega}\|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}\|u\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq (1 + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)})\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega},\ u, v \in V, \end{aligned}$$

et que la forme linéaire L est continue sur V :

$$|L(v)| \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega}\|v\|_{1,\Omega},\ v \in V.$$

Si l'on fait de plus l'hypothèse que $c(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in \Omega$, il vient immédiatement que $a(u,u) \geq \|\nabla u\|^2_{0,\Omega}$ pour tout $u \in V$, ce qui, compte tenu de l'inégalité de Poincaré du Théorème 33 (qui s'applique bien ici car Ω est borné), entraîne :

$$a(u,u) \geq C(\Omega)\|u\|^2_{1,\Omega},\ u \in V.$$

Ainsi a est V-elliptique donc il existe une unique solution $u \in V$ au problème $(\mathcal{P}_\Omega)$ en vertu du théorème de Lax-Milgram. Ceci, combiné à (114), justifie le :

Théorème 51. *Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière Γ est C^1 par morceaux. Si*

$$c(x) \geq 0,\ \text{p.p. } x \in \Omega,$$

alors alors le problème (109)-(110) *admet une unique solution $u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega)$.*

5.2.2 Conditions au bord homogènes de type Neumann

Formulation variationnelle. Si l'on choisit u est suffisamment régulière, par exemple si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors en multipliant (111) par $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ puis en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \ \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega), \tag{115}$$

par la formule de Stokes du Corollaire 47, en tenant compte de (112). La formulation variationnelle (115) ayant un sens dès que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, on associe ensuit le problème variationnel $(\mathcal{P}'_\Omega)$ au problème (111)-(112) :

$$(\mathcal{P}'_\Omega) \quad \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ vérifiant (115).}$$

On vient donc de vérifier que toute solution $\mathrm{H}^2(\Omega)$ de (111)-(112) est forcément solution de $(\mathcal{P}'_\Omega)$. Remarquons que, comme dans le cas du problème (109)-(110) (avec conditions au bord de type Dirichlet), il n'est pas nécessaire de supposer $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ pour obtenir $(\mathcal{P}'_\Omega)$. En effet si $u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega)$ est solution de (111)-(112), on obtient également (115) à partir des mêmes calculs que précédement, en utilisant la formule de Stokes généralisée (108).
Réciproquement, si u est solution de $(\mathcal{P}'_\Omega)$, on peut écrire

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla \varphi(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)\varphi(x)dx = \int_I f(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in D(\Omega),$$

car $D(\Omega) \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$, ce qui entraîne que $\langle -\Delta u + cu, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ pour tout $\varphi \in D(\Omega)$. Cela montre que $-\Delta u + cu = f$ dans $D'(\Omega)$, et donc dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, en utilisant le fait que $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Par suite (111) e bien lieu presque partout dans Ω. Incidemment on a aussi obtenu que $\Delta u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et donc que $u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega)$. Il reste maintenant à montrer que u satisfait (110). Pour cela il suffit de multiplier (111) par $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ (on vient de vérifier que cette identité est bien vraie presque partout dans Ω), d'intègrer le résultat obtenu sur Ω, puis d'appliquer la formule de Stokes généralisée (108), ce qui est licite, puisque $u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega)$. Il vient alors :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)dx = \langle \gamma_\nu u, \gamma_0 v\rangle + \int_\Omega f(x)v(x)dx, \ v \in \mathrm{H}^1(\Omega).$$

En comparant cette identité à (115) on voit que $\langle \gamma_\nu u, \gamma_0 v\rangle = 0$ pour tout $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$. Comme γ_0 est une surjection de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ sur $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)$ d'après la remarque 39, cela entraîne $\gamma_\nu u = 0$ dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$, et donc que u satisfait (110).
En résumé nous avons obtenu l'équivalence :

$$u \in \mathrm{H}(\Delta;\Omega) \text{ est solution de } (111)-(112) \Longleftrightarrow u \text{ est solution de } (\mathcal{P}'_\Omega). \tag{116}$$

Existence et unicité de la solution. Le problème $(\mathcal{P}'_\Omega)$ revenant à chercher $u \in V = \mathrm{H}^1(\Omega)$ qui satisfait $a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$, les deux formes a et L étant inchangées par rapport au problème avec conditions au bord de Dirichlet, il suffit de s'assurer que a est V-elliptique. Pour cela on impose à c de vérifier $c(x) \geq c_0 > 0$ pour presque tout $x \in \Omega$. On peut alors appliquer le théorème de Lax-Milgram, qui, combiné à l'équivalence (116), entraîne le :

Théorème 52. *Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière Γ est C^1 par morceaux. Si*

$$c(x) \geq c_0 > 0, \text{ p.p. } x \in \Omega,$$

alors le problème (111)-(112) *admet une unique solution* $u \in \mathrm{H}(\Delta; \Omega)$.

5.3 Exercices sur les problèmes elliptiques en dimension ≥ 2

5.3.1 Enoncés

Ex1. (Conditions aux limites Dirichlet-Neumann homogènes mélées). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, C^1 par morceaux, avec $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et $\mathrm{mes}(\Gamma_0) > 0$. Etant donné $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, on considère le problème aux limites suivant : trouver u solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, & (117) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0, & (118) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_1. & (119) \end{cases}$$

a) Montrer que $V = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ v_{|\Gamma_0} = 0\}$, où la notation $v_{|\Gamma_0} = 0$ signifie $\gamma_0 v(\sigma) = 0$ pour presque tout $\sigma \in \Gamma_0$ (autrement dit $v_{|\Gamma_0} = (\gamma_0 v)_{|\Gamma_0}$), est un s.e.v. fermé de $\mathrm{H}^1(\Omega)$.

b) Montrer que si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ est solution de (117)-(119) alors u est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_\Omega (\nabla u(x).\nabla v(x) + u(x)v(x))dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in V. \qquad (120)$$

c) Montrer que (120) admet une unique solution.

d) En admettant que $\{(\gamma_0 v)_{|\Gamma_1},\ v \in V\}$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Gamma_1)$, montrer réciproquement que si $u \in V \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ satisfait (120) alors u est solution de (117)-(119).

Ex2. (Cas d'un ouvert connexe). Les notations étant celles de l'**Ex1** on suppose de plus que Ω est connexe.

a) En admettant que l'injection canonique de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ est compacte (i.e. que tout ensemble borné de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est relativement compact dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$), montrer qu'il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$, ne dépendant que de Ω, pour laquelle on a

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega)\|\nabla v\|_{0,\Omega},\ \forall v \in V.$$

Indication : on raisonnera par l'absurde en supposant l'existence d'une suite $(v_m)_m$ dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ satisfaisant $\|v_m\|_{0,\Omega} > m\|\nabla v_m\|_{0,\Omega}$ pour tout $m \geq 1$, puis l'on montrera que $(v_m/\|v_m\|_{1,\Omega})_m$ admet une sous-suite qui converge dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$, de limite nulle.

b) En déduire que $|v|_{1,\Omega} = \|\nabla v\|_{0,\Omega}$ est une norme équivalente à $\|v\|_{1,\Omega}$ sur V.

c) Etant donné $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, montrer que toute fonction $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, & (121) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_0, & (122) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, & (123) \end{cases}$$

est solution du problème variationnel suivant :

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in V. \tag{124}$$

d) Montrer que (124) admet une unique solution.

e) Sous l'hypothèse que $\{(\gamma_0 v)_{|\Gamma_1},\ v \in V\}$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Gamma_1)$, montrer réciproquement que si $u \in V \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ satisfait (124) alors u est solution de (121)-(123).

Ex3. Ω étant comme dans l'**Ex1**, on considère le problème : trouver u solution de

$$\begin{cases} -\nabla.(p\nabla u) + u = f \text{ dans } \Omega, & (125)\\ u = g_0 \text{ sur } \Gamma_0, & (126)\\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u = g_1 \text{ sur } \Gamma_1, & (127)\end{cases}$$

où l'on suppose que :

(i) $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$;

(ii) $p \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ vérifie $p(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ où $\alpha > 0$ est une constante fixée ;

(iii) $\sigma \in \mathbb{R}_+$;

(iv) $g_0 \in \mathrm{L}^2(\Gamma_0)$ est telle qu'il existe $u_0 \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ satisfaisant $\gamma_0(u_0)(\sigma) = g_0(\sigma)$ pour presque tout $x \in \Gamma_0$;

(v) $g_1 \in \mathrm{L}^2(\Gamma_1)$.

V désignant l'espace fonctionnel défini à l'Exercice 1, on pose pour tout u et v dans V :

$$a(u,v) = \int_\Omega (p(x)\nabla u(x).\nabla v(x) + u(x)v(x)dx + \sigma \int_{\Gamma_1} p(\sigma)u(\sigma)v(\sigma)d\sigma,$$

et

$$L(v) = \int_\Omega f(x)u(x)v(x)dx + \int_{\Gamma_1} p(\sigma)g_1(\sigma)v(\sigma)d\sigma.$$

a) Montrer que si $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ est solution de (125)-(127) alors $\tilde{u} = u - u_0 \in V$ satisfait

$$a(\tilde{u}, v) = L(v) - a(u_0, v),\ \forall v \in V. \tag{128}$$

b) Montrer qu'il existe une unique solution $\tilde{u} \in V$ de (128).

c) En admettant que $\{(\gamma_0 v)_{|\Gamma_1},\ v \in V\}$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\Gamma_1)$, montrer réciproquement que si la solution $\tilde{u}$ de (128) est telle que $u = \tilde{u} + u_0 \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, alors u est solution de (125)-(127).

6 Schémas éléments finis 2D

On va considérer ici le cas particulier de l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ sur des triangles. Pour un exposé un peu plus général des notions introduites dans la suite de cette partie se reporter à [6, 7].

6.1 Approximation des fonctions en dimension 2

6.1.1 Élément fini de Lagrange $\mathbb{P}_1$ sur des triangles

Définition et unisolvance. Soit K un triangle compact *non dégénéré*, c'est-à-dire d'intérieur non vide, et soit $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$ l'ensemble de ses sommets $a_j = (x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, $1 \leq j \leq 3$. Il est facile de vérifier que

$$K \text{ est non dégénéré} \Longleftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{129}$$

Notons $\mathbb{P}_1$ l'ensemble des fonctions polynômiales en (x, y) à coefficients réels et de degré ≤ 1 :

$$\mathbb{P}_1 = \{p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma,\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}.$$

Lemme 53. $(K, \mathbb{P}_1, \Sigma)$ *est*[22] *unisolvant, c'est-à-dire :*

$$\forall (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathbb{R}^3,\ \exists! p \in \mathbb{P}_1,\ p(a_j) = \theta_j,\ 1 \leq j \leq 3.$$

Démonstration.
Comme dim $\mathbb{P}_1$ = dim $\mathbb{R}^3 = 3$ et que l'application $\varphi(p) = (p(a_1), p(a_2), p(a_3))$ est linéaire de $\mathbb{P}_1$ dans $\mathbb{R}^3$, il suffit de prouver qu'elle est injective (ce sera alors un isomorphisme de $\mathbb{P}_1$ sur $\mathbb{R}^3$). Pour cela, on vérifie facilement pout tout $p(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ que

$$\varphi(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui, en vertu de (129), implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, c'est-à-dire $p = 0$. □
On résume l'énoncé du Lemme 53 en disant que $(K, \mathbb{P}_1, \Sigma)$ est un *élément fini de Lagrange.*
La $\mathbb{P}_1$-unisolvance de Σ garantit que

$$\forall i = 1, 2, 3,\ \exists! p_i \in \mathbb{P}_1,\ p_i(a_j = \delta_{i,j},\ 1 \leq j \leq 3. \tag{130}$$

Les fonctions p_i, $i = 1, 2, 3$, définies par (130), s'appellent des *fonctions de forme.* Il est clair que $\{p_i\}_{i=1}^3$ est une base de $\mathbb{P}_1$.

22. On dit aussi de façon équivalente que Σ est $\mathbb{P}_1$-unisolvant.

$\mathbb{P}_1$ interpolation de Lagrange. K désignant toujours un triangle non dégénéré d'ensemble de sommets $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$, l'*opérateur de $\mathbb{P}_1$ interpolation de Lagrange sur* Σ est l'opérateur Π_K^1 qui à toute fonction $v : K \to \mathbb{R}$ associe $\Pi_K^1 v = \sum_{j=1}^3 v(a_j)p_j$. La fonction $\Pi_K^1 v$ s'appelle le $\mathbb{P}_1$ *interpolé de Lagrange de* v *sur* Σ, car elle vérifie

$$(\Pi_K^1 v)(a_j) = v(a_j), \ 1 \le j \le 3. \tag{131}$$

Notant $h_K = \text{diam } K = \max_{M,M' \in K} \|M - M'\|_{\mathbb{R}^2}$ le *diamètre de* K, et δ_K sa *rondeur*, définie comme le diamètre maximal des cercles inscrits dans K, on a le :

Théorème 54. *Il existe une constante $C_0 > 0$, indépendante de K, vérifiant pour tout $u \in \mathrm{H}^2(K)$:*

(a) $\|u - \Pi_K^1 u\|_{0,K} \le C_0 h_K^2 \|D^2 u\|_{0,K}$

(b) $\|\nabla(u - \Pi_K^1 u)\|_{0,K} \le C_0 \frac{h_K^2}{\delta_K} \|D^2 u\|_{0,K}$.

On peut remarquer que le *facteur de forme de* K, h_k/δ_K, est d'autant plus grand que le triangle K est "allongé".

6.1.2 Approximation dans un ouvert polyédrique

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière $\Gamma = \partial\Omega$ [23]polyédrique.

Triangulation et maillage. Soit $\mathcal{T}_h$ une *triangulation de* Ω, c'est-à-dire un recouvrement de Ω par des triangles :

$$\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

Le "paramètre" $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ désigne en fait le diamètre maximal des triangles de la triangulation.
On dit que $\mathcal{T}_h$ est un *maillage de* Ω si

$$\forall K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h, \ K_1 \neq K_2 \Longrightarrow K_1 \cap K_2 = \begin{cases} \qquad \emptyset \\ \text{ou} \\ \qquad \text{un sommet commun} \\ \text{ou} \\ \qquad \text{un coté commun.} \end{cases}$$

Si c'est le cas, alors tout coté de $K \in \mathcal{T}_h$ est

(i) soit le coté d'un autre triangle $K' \in \mathcal{T}_h$, auquel cas K et K' sont dits *adjacents* ;

(ii) soit une partie de la frontière Γ.

Dans tout ce qui suit, on supposera que le maillage $\mathcal{T}_h$ satisfait la propriété "géométrique" suivante :

$$\exists C_1 > 0, \ \max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\delta_K} \le C_1. \tag{132}$$

Cette condition, qui impose que le facteur de forme h_K/δ_K de n'importe quel triangle $K \in \mathcal{T}_h$ reste inférieur à une valeur fixée *a priori*, interdit la présence de triangles "infiniment" allongés dans le maillage $\mathcal{T}_h$.

23. C'est-à-dire affine par morceaux.

Espace d'approximation. Etant donné un maillage $\mathcal{T}_h$ satisfaisant la condition (132), l'espace d'approximation "naturellement" associé à $\mathcal{T}_h$ (et à $\mathbb{P}_1$) est

$$V_h^1 = \{v \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}),\ v_{|K} \in \mathbb{P}_1,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{133}$$

Proposition 55. *V_h^1 étant défini par* (133), *on a :*

(a) V_h^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^0(\overline{\Omega})$ dont la dimension est égale au nombre de sommets de $\mathcal{T}_h$.

(b) De plus, l'élément fini $\mathbb{P}_1$ est de classe H^1, en ce sens que $V_h^1 \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Notant s^j, $1 \le j \le N$, les $N \ge 3$ sommets de $\mathcal{T}_h$, on considère la fonction $\Phi^j \in V_h^1$ satisfaisant

$$\Phi^j(s^j) = \delta_{j,k},\ 1 \le j,k \le N. \tag{134}$$

Il résulte du Lemme 53 que la famille $\{\Phi^j\}_{j=1}^N$ est uniquement définie. En effet :

(i) Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, $\Phi^j_{|K}$ est fixée ;

(ii) Si $K \in \mathcal{T}_h$ et $K' \in \mathcal{T}_h$ sont deux triangles adjacents, avec s et s' pour sommets de leur coté commun, alors, comme $\Phi^j_{|K}, \Phi^k_{|K'} \in \mathbb{P}_1$, et que $\Phi^j_{|K}(s) = \Phi^j_{|K'}(s)$ et $\Phi^j_{|K}(s') = \Phi^j_{|K'}(s')$, on a forcément $\Phi^j_{|K} = \Phi^j_{|K'}$ sur l'arête commune $[s,s']$, ce qui établit bien que $\Phi^j_{K\cup K'} \in \mathrm{C}^0(K \cup K')$.

Ensuite, comme $\{\Phi^j\}_{j=1}^N$ est libre dans V_h^1 et que la dimension de V_h^1 est N, en vertu de la Proposition 55(a), il est immédiat que

$$\{\Phi^j\}_{j=1}^N \text{ est une base de } V_h^1. \tag{135}$$

Opérateur de projection. Compte tenu de (135), l'*opérateur de projection sur* V_h^1 est défini celui qui, à toute fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$, associe $\Pi_h^1 v = \sum_{j=1}^N v_j \Phi^j$, où $v_j = v(s^j)$. Evidemment, pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, on a

$$(\Pi_h^1 v)_{|K} = \Pi_K^1 v,$$

car $\Pi_h^1 v$ et $\Pi_K^1 v$ sont tous deux dans $\mathbb{P}_1$ et coïncident aux trois sommets de K.

Théorème 56. *Ω désignant un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ à frontière polyhédrique et $\mathcal{T}_h$ un maillage de Ω satisfaisant* (132), *il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de Ω, telle que pour tout $v \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, on ait :*

(a) $\|v - \Pi_h^1 v\|_{0,\Omega} \le Ch^2 \|D^2 v\|_{0,\Omega}$ *;*

(b) $\|\nabla(v - \Pi_h^1 v)\|_{0,\Omega} \le Ch \|D^2 v\|_{0,\Omega}$.

Démonstration.
Pour le (a), il suffit de remarquer que $\|v - \Pi_h^1 v\|^2_{0,\Omega} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v - \Pi_h^1 v\|^2_{0,K}$ puis d'appliquer le Théorème 54(a) à $v_{|K} \in \mathrm{H}^2(K)$ pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$. On obtient ainsi que

$$\|v - \Pi_h^1 v\|^2_{0,\Omega} \le C_0^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^4 \|D^2 v\|^2_{0,K},$$

ce qui entraîne le résultat en tenant compte du fait que $h_K \leq h$ pour tout $K \in \mathcal{T}_h$, et que $\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\|D^2v\|_{0,K}^2 = \|D^2v\|_{0,\Omega}$. De même, il vient facilement grâce au Théorème 54 que

$$\|\nabla(v - \Pi_h^1 v)\|_{0,\Omega}^2 \leq C_0^2 \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{\delta_K} h_K^2 \|D^2v\|_{0,K}^2,$$

de sorte que (b) s'ensuit directement de ceci et de (132). □

6.2 Mise en œuvre pratique

Ω désignant un ouvert borné polyédrique de $\mathbb{R}^2$, on considère maintenant le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega & (136) \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma. & (137) \end{cases}$$

Comme (136)-(137) n'est rien d'autre que le système (109)-(110) dans le cas particulier où $c = 0$, le Théorème 51 garantit l'existence et l'unicité de la solution $u \in \mathrm{H}(\Delta, \Omega)$ de (136)-(137), et le problème variationnel associé à (136)-(137) s'écrit : trouver $u \in V = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ solution de

$$(P_\Omega) \quad \text{Trouver } u \in V \text{ solution de } (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} = (f, v)_{0,\Omega}, \ \forall v \in V.$$

On pose donc $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega}$ et $L(v) = (f, v)_{0,\Omega}$ pour tout $u, v \in V$.

6.2.1 Problème variationnel discret

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω vérifiant (132). On pose

$$V_{0,h}^1 = \{v \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}),\ v_{|\Gamma} = 0,\ v_{|K} \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

On a $V_{0,h}^1 \subset V$ en vertu de la Proposition 55(b). Par ailleurs, il est facile de vérifier la :

Proposition 57. *$V_{0,h}^1$ est un sous-espace vectoriel de V dont la dimension est égale au nombre de*[24]*sommets intérieurs de $\mathcal{T}_h$.*

Le problème variationnel discret associé à (P_Ω) s'écrit

$$(P_{\Omega,h}) \quad \text{Trouver } u_h \in V_{0,h}^1 \text{ solution de } (\nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} = (f, v_h)_{0,\Omega}, \ \forall v_h \in V_{0,h}^1.$$

A la lumière de la Proposition 57 et du Théorème 17, u_h existe et est unique.

6.2.2 Mise sous forme matricielle

Soit $\{s^j\}_{j=1}^N$ l'ensemble des sommets intérieurs de $\mathcal{T}_h$. On considère une base $\{\Phi^j\}_{j=1}^N$ de $V_{0,h}^1$, vérifiant

$$\Phi^j \in V_{0,h}^1,\ \Phi^j(s^k) = \delta_{j,k},\ 1 \leq j, k \leq N,$$

24. Il s'agit des sommets $s \notin \Gamma$, c'est-à-dire ceux qui n'appartiennent pas au bord de Ω.

de sorte que $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \Phi^i$ avec $u_i = u_h(s^i)$, $1 \le i \le N$ et $v_h = \sum_{j=1}^N v_j \Phi^j$ où $v_j = v_h(s^j)$, $1 \le j \le N$, pour tout $v_h \in V^1_{0,h}$. Posant ensuite $U_h = (u_1, u_2, \ldots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ et $V_h = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^T \in \mathbb{R}^N$, il vient facilement

$$a(u_h, v_h) = \sum_{i,j=1}^N a_{i,j} u_i v_j = V_h^T A_h U_h \text{ où } A_h = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le N} \text{ et } a_{i,j} = a(\Phi^i, \Phi^j),$$

et

$$L(v_h) = \sum_{j=1}^N L(\Phi^j) v_j = V_h^T F_h \text{ avec } F_h = (f_1, f_2, \ldots, f_N)^T \text{ et } f_j = L(\Phi^j).$$

La matrice A_h s'appelle matrice de rigidité du problème $(P_{\Omega,h})$. Elle est symétrique définie positive et vérifie :

$$\begin{aligned} u_h \text{ est solution de } \mathcal{P}_{\Omega,h} &\iff U_h \in \mathbb{R}^N \text{ satisfait } V_h^T A_h U_h = V_h^T F_h,\ \forall V_h \in \mathbb{R}^N \\ &\iff U_h \in \mathbb{R}^N \text{ est solution de } A_h U_h = F_h. \end{aligned} \tag{138}$$

6.2.3 Assemblage des matrices élémentaires

Fonctions de forme et matrice d'assemblage élémentaire. Etant donné un triangle compact non dégénéré $K = (a_1, a_2, a_3)$, les fonctions de forme p_i^K, $i = 1, 2, 3$, associées à K sont définies la condition suivante :

$$p_i^K \in \mathbb{P}_1,\ p_i^K(a_j) = \delta_{i,j},\ 1 \le i, j \le 3.$$

La **matrice d'assemblage élémentaire associée à** K est $(\alpha_{i,j})_{1 \le i,j \le 3}$, où

$$\alpha_{i,j}^K = a(p_i^K), p_j^k) = (\nabla p_i^K, \nabla p_j^K)_{0,K},\ 1 \le i, j \le 3.$$

Exemples. Soient $h > 0$ et $K = (a_1, a_2, a_3)$ avec $a_1 = (0, h)$, $a_2 = (h, h)$ et $a_3 = (0, 0)$. Alors les fonctions de formes associées à K sont

$$p_1^K(x, y) = \frac{y - x}{h},\ p_2^K(x, y) = \frac{x}{h},\ p_3^K(x, y) = 1 - \frac{y}{h},$$

de sorte que la matrice d'assemblage de K est

$$\alpha^K = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Si l'on considère $K' = (a_1', a_2', a_3')$ où $a_1' = (h, h)$, $a_2 = (h, 0)$ et $a_3 = (0, 0)$. Alors les fonctions de formes associées à K sont

$$p_1^{K'}(x, y) = \frac{y}{h},\ p_2^{K'}(x, y) = \frac{x - y}{h},\ p_3^{K'}(x, y) = \frac{x}{h},$$

et la matrice d'assemblage de K' s'écrit

$$\alpha^{K'} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0/ & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

6.2.4 Assemblage de la matrice de rigidité

Considérons le cas particulier où $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. On décompose Ω en 4^2 carrés de longueur $1/4$, puis on découpe chacun de ces carrés en triangles selon la diagonale joignant les sommets "sud-ouest" et "nord-est". Ce qui fait que chacun des triangles de la triangulation obtenue $\mathcal{T}_h$ est de l'une des deux formes K ou K' définies au §6.2.3. Comme $\mathcal{T}_h$ a 9 sommets intérieurs, la matrice de rigidité A_h est une matrice carrée 9×9. On note $A_h = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 9}$. Il est facile de vérifier que

$$a_{1,1} = \sum_{i=1}^{3} (\alpha_{i,i} + \alpha'_{i,i}),\ a_{1,2} = \alpha_{1,2} + \alpha'_{2,3},\ a_{1,3} = 0,$$

$$a_{1,4} = \alpha_{1,3} + \alpha'_{1,2},\ a_{1,5} = a_{1,6} = a_{1,7} = a_{1,8} = a_{1,9} = 0.$$

$$a_{2,1} = a_{1,2},\ a_{2,2} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i,i} + \alpha'_{i,i},\ a_{2,3} = \alpha'_{2,3} + \alpha_{1,2},$$

$$a_{2,4} = \alpha_{2,3} + \alpha'_{1,3},\ a_{2,5} = \alpha_{1,2} + \alpha'_{1,3},\ a_{2,6} = a_{2,7} = a_{2,8} = a_{2,9} = 0.$$

$$a_{3,1} = a_{1,3},\ a_{3,2} = a_{2,3},\ a_{3,3} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i,i} + \alpha'_{i,i}, a_{3,4} = 0,$$

$$a_{3,5} = \alpha_{2,3} + \alpha'_{3,1},\ a_{3,6} = \alpha_{1,3} + \alpha'_{1,2},\ a_{3,7} = a_{3,8} = a_{3,9} = 0,$$

$$a_{4,1} = a_{1,4},\ a_{4,2} = a_{2,4},\ a_{4,3} = a_{3,4},\ a_{4,4} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i,i} + \alpha'_{i,i},$$

$$a_{4,5} = \alpha_{1,2} + \alpha'_{2,3},\ a_{4,6} = 0,\ a_{4,7} = \alpha_{1,3} + \alpha'_{1,2},\ a_{4,8} = a_{4,9} = 0,\ \text{etc.}$$

Ce qui donne :

$$A_h = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.3 Analyse d'erreur de la méthode

Ω désignant toujours un ouvert de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ polyédrique, on note u la solution de (136)-(137), et u_h la solution du problème discret $(P_{\Omega,h})$ défini au §6.2. Comme $u \in \mathrm{H}(\Delta,\Omega) \cap \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ alors $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ et il existe de plus une constante $C > 0$, ne dépendant pas de u, telle que

$$\|D^2 u\|_{0,\Omega} \leq C \|\Delta u\|_{0,\Omega}.$$

Ce résultat est en fait valable pour tous les ouverts Ω de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière Γ est polygonale convexe.

6.3.1 Erreur en norme $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$

Reprenant les notations du §6.2, on a le :

Théorème 58. *Il existe une constante $c > 0$, indépendante de h telle que*

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega} \leq ch\|f\|_{0,\Omega}.$$

Ceci montre que la méthode est d'ordre 1 en norme $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$.

6.3.2 Erreur en norme $\mathrm{L}^2(\Omega)$

Comme u et u_h appartiennent tous deux à $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré combinée au Théorème 58 montre que

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq cC(\Omega)\|f\|_{0,\Omega},$$

la constante $C(\Omega) > 0$ étant définie au Théorème 33. En fait, on peut montrer que la méthode est d'ordre 2 en norme $\mathrm{L}^2(\Omega)$:

Théorème 59. *Il existe une constante $\tilde{c} > 0$, indépendante de h telle que*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \leq \tilde{c}h^2\|f\|_{0,\Omega}.$$

6.4 Exercices

Ex1. (**Résultats d'approximation par des éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange**). Le but de cet exercice est de prouver le Théorème 54 : étant donné un triangle non dégénéré K, il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de K, satisfaisant

$$\|u - \Pi^1_K u\|_{0,K} \leq C_0 h_K^2 \|D^2 u\|_{0,K} \text{ et } \|\nabla(u - \Pi^1_K u)\|_{0,K} \leq C_0 \frac{h_K^2}{\rho_K}\|D^2 u\|_{0,K},\ \forall u \in \mathrm{H}^2(K).$$

On rappelle qu'ici Π^1_K désigne l'opérateur de projection au sens de l'élément fini $\mathbb{P}_1$ sur K, h_K est le diamètre de K et ρ_K sa rondeur.

a) Soit $K = (a_1, a_2, a_3)$ un triangle de sommets a_1, a_2 et a_3, avec $a_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $1 \leq i \leq 3$. A quelle condition (portant sur les coordonnées $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$, $1 \leq i \leq 3$) le triangle K est-il non dégénéré ?

b) Soit ensuite $\hat{K} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ le triangle de référence de sommets $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$ et $\hat{a}_3 = (1, 1)$. Montrer qu'il existe $(B, b) \in GL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ tel que $K = F(\hat{K})$ avec $F(\hat{x}) = B\hat{x} + b$ pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$.

c) Montrer que $\|B\|_2 \leq h_K/\hat{\rho}$ et $\|B^{-1}\| \leq \hat{h}/\rho_K$, où $\hat{h} = h_{\hat{K}}$, $\hat{\rho} = \rho_{\hat{K}}$ et $\|.\|_2$ désigne la norme matricielle induite par la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

d) Pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$ on pose $x = F(\hat{x})$ puis, pour toute fonction $v : K \mapsto \mathbb{R}$, on définit $\hat{v}(\hat{x}) = v(F(\hat{x})) = v(x)$. [25]Montrer que

$$\|v\|^2_{0,K} = |\det B|\|\hat{v}\|^2_{0,\hat{K}},\ \forall v \in \mathrm{L}^2(K).$$

25. Utiliser la formule de changement de variable $\int_K v(x)dx = \int_{F(\hat{K})} v(x)dx = \int_{\hat{K}} v(F(\hat{x}))|\det(\text{Jac } F(\hat{x}))|d\hat{x}$, où Jac $F(\hat{x})$ désigne la matrice jacobienne de F au point $\hat{x}$.

e) Vérifier pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ que $(\nabla\hat{v}(\hat{x}), \xi)_{\mathbb{R}^2} = (\nabla v(x), B\xi)_{\mathbb{R}^2}$ pour presque tout $x \in K$, et en déduire que

$$\|\nabla v\|_{0,K}^2 \leq |\det B| \|B^{-1}\|_2^2 \|\nabla \hat{v}\|_{0,\hat{K}}^2, \ \forall v \in \mathrm{H}^1(K).$$

f) Vérifier pour tout $\xi \in \mathbb{R}^2$ que $(D^2\hat{v}(\hat{x})\xi, \xi)_{\mathbb{R}^2} = (D^2v(x)(B\xi), B\xi)_{\mathbb{R}^2}$ pour presque tout $x \in K$, et en déduire que

$$\|D^2\hat{v}\|_{0,\hat{K}}^2 \leq |\det B|^{-1} \|B\|_2^4 \|D^2 v\|_{0,K}^2, \ \forall v \in \mathrm{H}^2(K).$$

g) En admettant l'existence d'une constante $C(\hat{K}) > 0$ satisfaisant

$$\|\hat{u} - \Pi_{\hat{K}}^1 \hat{u}\|_{1,\hat{K}} \leq C(\hat{K}) \|D^2\hat{u}\|_{0,\hat{K}}, \ \forall \hat{u} \in \mathrm{H}^2(\hat{K}),$$

montrer pour tout $u \in \mathrm{H}^2(K)$ que l'on a

$$\|u - \Pi_K^1 u\|_{0,K} \leq \frac{C(\hat{K})}{\hat{\rho}^2} h_K^2 \|D^2 u\|_{0,K} \text{ et } \|\nabla(u - \Pi_K^1 u)\|_{0,K} \leq \frac{C(\hat{K})\hat{h}}{\hat{\rho}^2} \frac{h_K^2}{\rho_K} \|D^2 u\|_{0,K}.$$

Ex2. (Éléments finis $\mathbb{P}_1$ de Lagrange triangulaires). On reprend le système de l'Ex1 du §5.3.1 dans le cas particulier où $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ et $\Gamma_0 = \{(x,0), (x,1), \ 0 < x < 1\}$.

a) Comment se traduit la condition au bord (119) sur Γ_1 ?

b) Etant donné $N \geq 1$, on décompose Ω en N^2 carrés de longueur $1/N$, puis on découpe chacun de ces carrés en triangles selon la diagonale joignant les sommets "nord-ouest" et "sud-est". On note $\mathcal{T}_h$ la triangulation de Ω ainsi obtenue. Quel est le diamètre de $\mathcal{T}_h$? La triangulation $\mathcal{T}_h$ est-elle régulière ?

c) On considère maintenant l'espace d'approximation $V_h = \{v \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}), \ v_{|K} \in \mathbb{P}_1, \ \forall K \in \mathcal{T} \ v_{|\Gamma_0} = 0\}$, où $\mathbb{P}_1$ désigne l'ensemble des fonctions polynômiales à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 1 en (x, y). Quelle est sa dimension ? Décrire une base de V_h.

d) Justifier que $V_h \subset V$. Décrire (en fonction des éléments de la base de V_h ci-dessus et de f) le système linéaire associé au problème variationnel discret : trouver $u_h \in V_h$ satisfaisant

$$\int_\Omega (\nabla u_h(x).\nabla v_h(x) + u_h(x)v_h(x))dx = \int_\Omega f(x)v_h(x)dx, \ \forall v_h \in V_h,$$

Montrer que la matrice de rigidité A_h ce système est symétrique définie positive.

e) Quelle vitesse de convergence peut-on espérer pour $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ lorsque $N \to +\infty$?

Ex3. (deuxième exercice de l'examen de décembre 2010). Soit $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Etant donnés $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ et $p \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, on considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\nabla.(p\nabla u) + u = f \text{ dans } \Omega, & (139) \\ u(0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 \text{ si } 0 < y < 1, & (140) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = u(x,1) = 0 \text{ si } 0 < x < 1. & (141) \end{cases}$$

Dans tout ce qui suit, la normale unitaire extérieure prise au point σ de la frontière Γ de Ω, est notée $\nu(\sigma)$.

1) Montrer que les conditions au bord (140)-(141) peuvent se réécrire sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} u = 0 \text{ sur } \Gamma_0, & (142) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_1, & (143) \end{cases}$$

où Γ_0 et Γ_1 sont des parties de Γ que l'on précisera.

2) Soit $V = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ v_{|\Gamma_0} = 0\}$. Montrer que toute solution $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ de (139), (140)-(141) (ou, ce qui revient au même, de (139), (142)-(143)) satisfait

$$u \in V \text{ et } \int_\Omega (p(x)\nabla u(x).\nabla v(x) + u(x)v(x))dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,\ \forall v \in V. \quad (144)$$

3) On suppose désormais que $p(x) \geq p_0 > 0$ pour presque tout $x \in \Omega$. Montrer qu'il existe un unique $u \in V$ solution de (141).

4) Etant donné $N \geq 1$, on décompose Ω en N^2 carrés de coté $1/N$, puis on découpe chacun de ces carrés en triangles selon la diagonale joignant les sommets "sud-ouest" et "nord-est". On note $\mathcal{T}_h$ la triangulation de Ω ainsi obtenue. Quel est le diamètre de $\mathcal{T}_h$? La triangulation $\mathcal{T}_h$ est-elle régulière ?

5) On considère maintenant l'espace d'approximation $V_h = \{v \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}),\ v_{|K} \in \mathbb{P}_1,\ \forall K \in \mathcal{T}\ \ v_{|\Gamma_0} = 0\}$, où $\mathbb{P}_1$ désigne l'ensemble des fonctions polynômiales à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 1 en (x, y). Quelle est sa dimension ? Définir ensuite une base de V_h. L'élément fini $\mathbb{P}_1$ est-il de classe H^1 ? Justifier votre réponse.

6) Décrire (en fonction des éléments de la base de V_h décrite à la question précédente, de f et de p) le système linéaire associé au problème variationnel discret : trouver $u_h \in V_h$ satisfaisant

$$\int_\Omega (p(x)\nabla u_h(x).\nabla v_h(x) + u_h(x)v_h(x))dx = \int_\Omega f(x)v_h(x)dx,\ \forall v_h \in V_h. \quad (145)$$

Montrer que la matrice de rigidité A_h ce système est symétrique définie positive.

7) Quelle vitesse de convergence peut-on espérer pour $\|u - u_h\|_{1,\Omega}$ lorsque $N \to +\infty$?

Références

[1] J.-M. Bony, *Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les éditions de l'Ecole polytechnique Palaiseau (2001).

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris (1993).

[3] P. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Dunod, Paris (1998).

[4] R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique*, Tome 5, Masson, Paris (1988).

[5] J. Rauch, *Partial Differential Equations*, Collection Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin (1997).

[6] P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris (1992).

[7] L. Sainsaulieu, *Calcul scientifique*, Collection 2ème cycle-Ecole d'ingénieurs, Dunod, Paris (2000).