Université d'Aix-Marseille
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux & Télécommunications

Mathématiques pour la théorie du signal

1. Suites numériques
2. Séries de Fourier
3. Transformation de Fourier
4. Transformation de Laplace

Table des matières

1 Suites numériques **5**

1.1 Généralités . . . 5

1.1.1 Préliminaires : la droite numérique réelle achevée . . . 5

1.1.2 Définitions et notations . . . 5

1.1.3 Suites monotones, suites bornées . . . 6

1.1.4 Suite extraite . . . 7

1.2 Notion de convergence . . . 7

1.2.1 Convergence vers $L \in \mathbb{R}$ . . . 7

1.2.2 Suite tendant vers l'infini . . . 7

1.2.3 Remarques sur les notions de convergence et de limite . . . 8

1.2.4 Valeur d'adhérence d'une suite . . . 8

1.2.5 Opérations sur les limites . . . 8

1.3 Suites particulières . . . 10

1.3.1 Suites monotones et bornées . . . 10

1.3.2 Suites récurrentes générales . . . 11

1.3.3 Suites récurrentes particulières . . . 12

1.4 Suites à termes complexes . . . 13

1.4.1 Définition et notations . . . 13

1.4.2 Lien avec les suites numériques réelles . . . 13

1.4.3 Notion de convergence . . . 13

2 Séries de Fourier **15**

2.1 La notion de série . . . 15

2.1.1 Séries numériques . . . 15

2.1.2 Séries de fonctions . . . 16

2.1.3 Séries trigomométriques . . . 17

2.2 Développement en série de Fourier . . . 17

2.2.1 Définition de la série de Fourier associée à une fonction . . . 18

2.2.2 Théorème de convergence . . . 19

2.2.3 Ecriture complexe de la S.F. . . . 20

2.2.4 Propriétés des coefficients de Fourier . . . 20

2.3 Opérations sur les coefficients de Fourier . . . 23

2.3.1 Le théorème de Bessel-Parseval . . . 23

2.3.2 Dérivation . . . 24

2.3.3 Intégration . . . 25

3 Transformation de Fourier **27**

3.1 Généralités . . . 27

3.1.1 Définition . . . 27

3.1.2 Première propriétés . . . 28

3.1.3 Exemple : de la fonction porte à la distribution de Dirac . . . 28

3.1.4 Formule de Parseval . . . 29

3.2 Inversion de $\mathcal{F}$ . . . 29

3.2.1 Formule d'inversion . . . 29

3.2.2 Exemple . . . 30

3.3 Propriétés de $\mathcal{F}$ . . . 30

3.3.1 Remarque préliminaire . . . 30

3.3.2 Linéarité . . . 31

3.3.3 Changement d'origine . . . 31

3.3.4 Changement d'origine . . . 31

3.3.5 Transformation de la dérivée . . . 32

3.3.6 Convolution . . . 32

4 Transformation de Laplace **35**

4.1 Intégrale de Laplace . . . 35

4.1.1 Définition . . . 35

4.1.2 Exemples . . . 36

4.2 Propriétés de $\mathcal{L}$ . . . 37

4.2.1 Linéarité . . . 37

4.2.2 Image de $f(ax)$ . . . 38

4.2.3 Changement d'origine . . . 38

4.2.4 Transformation de la dérivée . . . 39

4.2.5 Transformation de la primitive . . . 40

4.3 Transformée de Laplace inverse . . . 40

4.3.1 Définition . . . 40

4.3.2 Linéarité . . . 40

4.3.3 Calcul pratique d'originaux : formulaire . . . 40

4.3.4 Application à l'électrocinétique . . . 42

Chapitre 1

Suites numériques

1.1 Généralités

1.1.1 Préliminaires : la droite numérique réelle achevée

On appelle *droite numérique réelle achevée* l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ constitué par les nombres réels et les deux symboles $\pm\infty$:

$$\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}$$

On peut alors étendre certaines opérations algébriques définies sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$. On conviendra ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :

- $-\infty < x < +\infty$;
- $\pm\infty + x = \pm\infty$;
- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$;
- $|\pm\infty| = +\infty$.

1.1.2 Définitions et notations

On appelle *suite numérique réelle* toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble de ces suites (numériques réelles) est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et pour chaque entier n, il est d'usage de noter u_n plutôt que $u(n)$. Ainsi :

$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on écrit parfois plus simplement $(u_n)_n$ à la place de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 1.1.1 *Il arrive qu'une suite u ne soit définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \geq 1$. Quitte à poser $u_p = 0$ (par exemple) pour chaque entier p de 0 à $n_0 - 1$, on peut en fait supposer que u est bien définie sur $\mathbb{N}$ en entier, ce qui permet de se ramener à la définition précédente.*

Exemple : la suite géométrique de raison k, $k \in \mathbb{R}$.

On appelle *suite géométrique de raison k*, où k est un réel fixé, la suite suivante :

$$u = (k^0, k^1, k^2, \dots, k^n, \dots).$$

On vérifie facilement que cette suite u peut être définie de façons équivalentes :

– soit "explicitement", en posant $u_n = k^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

– soit "par récurrence" en posant $\begin{cases} u_0 & = & 1; \\ u_{n+1} & = & ku_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1.1.3 Suites monotones, suites bornées

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que u est *croissante* (resp. *strictement croissante*) si

$$u_n \leq u_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{resp. } u_n < u_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}).$$

De même, u sera dite *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) si

$$u_n \geq u_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{resp. } u_n > u_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}).$$

On dira ensuite que u est *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle croissante ou si elle décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).
Enfin, u est dite *majorée* (resp. *minorée*) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M \ (\text{resp. } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m).$$

M (resp. m) est alors <u>un</u> *majorant* (resp. *minorant*) de la suite u. Lorsque u est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est *bornée*. Cela revient à dire qu'il existe un réel C tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq C.$$

Exemple.

1. $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $v_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. $w_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.1.4 Suite extraite

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On appelle *suite extraite* ou *sous-suite* de u toute suite de la forme

$$v = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, u_{\varphi(2)}, \ldots, u_{\varphi(n)}, \ldots),$$

où φ est une application <u>strictement croissante</u> de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Cas particuliers. Suivant que l'on choisit :
- $\varphi(n) = 2n$, la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est formée des termes de rangs pairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, \ldots, u_{2n}, \ldots);$$

- $\varphi(n) = 2n+1$, la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est formée des termes de rangs impairs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_1, u_3, u_5, \ldots, u_{2n+1}, \ldots).$$

Exemple. Prenons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2 Notion de convergence

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1.2.1 Convergence vers $L \in \mathbb{R}$

Soit L un réel.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* L, ou, de façon équivalente, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* L *lorsque* n *tend vers l'infini*, si l'on peut associer à chaque réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi un entier naturel N_ε (qui dépend *a priori* de ε), tel que :

$$\forall n \geq N_\varepsilon,\ u_n \in [L-\varepsilon, L+\varepsilon].$$

Le réel L s'appelle alors la *limite* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'on note alors indifféremment :

$$L = \lim_{n\to\infty} u_n \text{ ou } u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

1.2.2 Suite tendant vers l'infini

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* n *tend vers l'infini*, (resp. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $-\infty$ *lorsque* n *tend vers l'infini*) si l'on peut associer à n'importe quel réel M (aussi grand que l'on veut) un entier naturel N_M (qui dépend *a priori* de M), tel que :

$$\forall n \geq N_M,\ u_n \in [M, +\infty[\text{ (resp. } \forall n \geq N_M,\ u_n \in]-\infty, M]).$$

Dans ce cas, on note alors :

$$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ (resp. } u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty).$$

1.2.3 Remarques sur les notions de convergence et de limite

Supposons que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$, on a forcément $A = B$ ("la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, est unique") ;
2. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle obtenue en ne modifiant qu'un nombre fini de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n = u_n$ pour tout $n \geq N_0$), alors $v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ ("la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, ne dépend pas de la valeur des premiers termes de cette suite") ;
3. Pour tout entier naturel p fixé, $u_{n+p} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ ("on ne change pas le comportement à l'infini de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en décalant ses termes") ;
4. $|u_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |A|$.

1.2.4 Valeur d'adhérence d'une suite

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que a est *valeur d'adhérence* (v.a. en abrégé) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a lorsque n tend vers l'infini.

Exemple. Prenons à nouveau $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.2.1 *Si $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence, qui est L.*

La proposition 1.2.1 permet en fait de caractériser les suites qui ne sont pas convergentes ou qui ne tendent pas vers $\pm\infty$, comme le montre le corollaire (évident) suivant.

Corollaire 1.2.1 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence distinctes, elle n'a pas de limite.*

Exemple. On prend une nouvelle fois $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.5 Opérations sur les limites

Comparaison

Théorème 1.2.1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :*
- *il existe un entier N pour lequel $u_n \leq v_n$ dès que $n \geq N$;*
- *$u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ et $v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B$.*

Alors, on a l'inégalité :

$$A \leq B.$$

Remarque 1.2.1 *Attention : le théorème 1.2.1 est faux pour les inégalités strictes. Autrement dit, sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, la condition* $u_n < v_n$ *pour tout* $n \geq N$ *N'IMPLIQUE PAS que* $A < B$.

Opérations algébriques

1. $\left.\begin{array}{l} u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \in \mathbb{R} \\ v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} B \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n + \lambda v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A + \lambda B$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et $u_n v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} AB$;
2. Si $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{0\}$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$ et :
$$\frac{1}{u_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{L};$$
3. $\left.\begin{array}{l} u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}_+ \\ v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n + v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $u_n v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Encadrement

Théorème 1.2.2 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont trois suites réelles telles que :*
- *il existe un entier* N *pour lequel* $u_n \leq v_n \leq w_n$ *dès que* $n \geq N$ *;*
- *il existe* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que* $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ *et* $w_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

On a alors :
$$v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A.$$

Preuve

■

Corollaire 1.2.2 $\left.\begin{array}{l} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ est bornée} \\ v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n v_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Preuve

■

Exemple. Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

1.3 Suites particulières

1.3.1 Suites monotones et bornées

Théorème 1.3.1 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante (resp. décroissante), on a l'alternative suivante :*

- *soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par* M *(resp. minorée par* m*) et dans ce cas elle converge vers* $L \leq M$ *(resp.* $L \geq m$*) ;*
- *soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée (resp. pas minorée), auquel cas elle tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*).*

Exemple. (Suite géométrique de raison k, $k \in \mathbb{R}$). Soient $k \in \mathbb{R}$ et $u_n = k^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.3.2 Suites récurrentes générales

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue.

Définition

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée :

- du premier terme de la suite $u_0 \in [a, b]$;
- de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On obtient ainsi une suite de points de $[a, b]$.
En effet :

- u_0 appartient à $[a, b]$ d'une part ;
- et si $u_n \in [a, b]$ pour un entier n donné, l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ assure que u_{n+1} appartient bien à $f([a, b]) = [a, b]$ d'autre part.

Ainsi, le principe de récurrence garantit que $u_n \in [a, b]$ pour tout entier naturel n.

Propriété immédiate

Supposons maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite L.
Comme on vient de voir que $a \leq u_n \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème d'encadrement assure que $L \in [a, b]$.
Or, f étant continue sur $[a, b]$, elle est continue au point L, donc, comme $u_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} L$, on a nécessairement :

$$f(u_n) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(L).$$

Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, il vient immédiatement

$$L = f(L),$$

car la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tend également vers L. Ceci montre en fait que :

$$\boxed{\text{La limite éventuelle de la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est à rechercher parmi les points fixes de } f.}$$

Exemple. Soient $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $f(x) = 2\ln(1+x)$.

1.3.3 Suites récurrentes particulières

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique réelle définie par la donnée de $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ ainsi que par la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = au_n + bu_{n-1},$$

où a et b sont deux réels fixés. On appelle *équation caractéristique* associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'équation du second degré en r suivante :

$$r^2 - ar - b = 0 \quad (EC)$$

On vérifie alors que lorsque (EC) possède :

- $\underline{\text{2 racines réelles distinctes } r_1 \text{ et } r_2}$, les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de la forme
$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n;$$
- $\underline{\text{1 racine double } r_0}$, les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de la forme
$$u_n = (\lambda_1 n + \lambda_2) r_0^n;$$
- $\underline{\text{2 racines complexes conjuguées } \rho e^{\pm j\omega}}$, les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de la forme
$$u_n = \rho^n \left[\lambda_1 \cos(n\omega) + \lambda_2 \sin(n\omega)\right],$$

où λ_1 et λ_2 sont deux réels à déterminer en fonction de la valeur du couple (u_0, u_1).

1.4 Suites à termes complexes

1.4.1 Définition et notations

Une *suite numérique complexe* est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. L'ensemble de ces suites numériques complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Comme $R \subset \mathbb{C}$, tout suite numérique réelle est donc forcément une suite numérique complexe :

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Lorsque $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, il est d'usage (comme cela a été fait pour les suites numériques réelles) de noter z_n plutôt que $z(n)$:

$$z = (z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ici encore, on notera parfois $(z_n)_n$ à la place de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

1.4.2 Lien avec les suites numériques réelles

Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = \mathrm{Re}\,(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}\,(z_n)$, de sorte que :

$$z_n = a_n + jb_n.$$

Comme a_n et b_n sont des réels pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{R}}$ sont des suites numériques réelles. Autrement dit, une suite numérique complexe $(z_n)_n$ est entièrement déterminée par la donnée de deux suites suites numériques réelles : la suite des parties réelles et celle des parties imaginaires des z_n.

1.4.3 Notion de convergence

Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec toujours $z_n = a_n + jb_n$ où $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ pour chaque $n \geq 0$.

Définition

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* $L \in \mathbb{C}$ *lorsque* n *tend vers l'infini* s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
- $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ et $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$;
- $L = a + jb$.

Une suite numérique complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente si et seulement si les suites numériques réelles $(\mathrm{Re}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément.
Dans ce cas, le complexe L est *la limite de* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $L = \lim_{n\to+\infty} z_n$ ou, de façon équivalente :

$$\underbrace{z_n}_{a_n+jb_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{L}_{a+jb}.$$

Compte tenu de l'unicité de la limite (éventuelle) de toute suite numérique réelle, il découle immédiatement de la définition de L, que la limite d'une suite complexe, lorsqu'elle existe, est elle-même unique.

Une condition nécessaire de convergence

Supposons que $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L = a + jb$. Les opérations algébriques sur les limites détaillées à la section §1.2.5 montrent que la suite réelle $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\left(z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} L = a + jb\right) \Longrightarrow \left(|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Par suite, on a bien l'implication :

$$\boxed{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Longrightarrow (|z_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Exemple. Soit $\rho > 1$. Montrer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ que $\left(\rho^n e^{jn\theta}\right)_n$ n'a pas de limite.

Remarque 1.4.1 *Attention : la réciproque est fausse. En clair, le fait que $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ne garantit pas que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Il suffit de prendre $\rho = 1$ et $\theta = \pi$ pour s'en convaincre.*

Chapitre 2

Séries de Fourier

2.1 La notion de série

2.1.1 Séries numériques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout entier naturel n, on appelle *somme partielle à l'ordre n de terme général u_n* la quantité :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

On définit ainsi une nouvelle suite de nombres complexes $(S_n)_n$ appelée *série numérique de terme général u_n*, qui est notée $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement $\{u_n\}_n$.

- Lorsque la suite $(S_n)_n$ a une limite dans $\mathbb{C}$, on dit que *la série $\{u_n\}_n$ converge*. Cette limite s'appelle alors *somme de la série $\{u_n\}_n$* et se note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, de sorte que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} u_n}_{S_N}.$$

- Dans le cas contraire, on dit que *la série $\{u_n\}_n$ diverge*.

Remarque 2.1.1 *La notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ ainsi que la terminologie employée ne doivent pas faire oublier que la somme d'une série numérique n'est pas une somme algébrique...mais une limite !*

Exemple. Soient $k \in \mathbb{C}$ et $u_n = k^n$ pour tout entier naturel n. Pour quelles valeurs de k la série $\{u_n\}_n$ est-elle convergente ?

2.1.2 Séries de fonctions

Soient $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble commun I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Quel que soit $x \in I$, $f_n(x) \in \mathbb{C}$ pour chaque entier naturel n, donc $\{f_n(x)\}_n$ est une série numérique à termes complexes. Considérons alors l'ensemble J de tous les réels x pour lesquels cette série numérique converge :

$$J = \{x \in I,\ \text{la série } \{f_n(x)\}_n \text{ converge}\}.$$

On peut maintenant définir une fonction S sur J en posant :

$$\forall x \in J,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Cette fonction S s'appelle *somme de la série de fonctions* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et son domaine de définition, J, s'appelle *domaine de convergence de la série de fonctions* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. En résumé, on peut donc écrire :

$$\forall x \in J, \quad \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)}_{\text{somme de la série de fonctions } \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}} (x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)}_{\text{somme de la série numérique } \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}}.$$

Exemple. Pour tout entier naturel n on pose $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in I = \mathbb{R}$. Déterminer le domaine de convergence et la somme de la série de fonctions $\{f_n\}_n$.

2.1.3 Séries trigomométriques

Remarque préliminaire concernant la périodicité

Soient $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f *est T-périodique* ou *de période T* si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

Avec cette définition, on démontre facilement par récurrence sur l'entier $m \geq 1$, que toute fonction T-périodique est *a fortiori* mT-périodique.

Exemple. Pour tout $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et tout entier $n \geq 1$, les fonctions $x \mapsto \sin(n\omega x)$ et $x \mapsto \cos(n\omega x)$ sont $\frac{2\pi}{n\omega}$-périodiques et donc $n \times \frac{2\pi}{n\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$-périodiques.

Définition et périodicité

On appelle *série trigonométrique* toute série de fonctions $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général u_n est de la forme

$$u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

où ω est un réel strictement positif fixé et $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. D'après l'exemple 2.1.3, la fonction u_n est $\frac{2\pi}{n\omega}$-périodique et donc $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique pour chaque entier $n \geq 1$. Ainsi :

Sur son domaine de convergence, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série (de fonctions) $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est $\frac{2\pi}{\omega}$-périodique.

En effet, en posant $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on a pour tout réel $x \in J$ et tout entier N :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x+T) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x),$$

donc en faisant tendre N vers l'infini :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)(x+T) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)(x).$$

2.2 Développement en série de Fourier

Dans toute la suite, ω désignera un réel strictement positif et on pose :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}.}$$

2.2.1 Définition de la série de Fourier associée à une fonction

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, T-périodique et intégrable sur tout intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$. On appelle *série de Fourier de f* (S.F. de f en abrégé), la série trigonométrique

$$\{a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

où

$$\boxed{a_0(f) = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx}$$

et

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n(f) = \frac{2}{T}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\cos(n\omega x)dx \\ b_n(f) = \frac{2}{T}\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\sin(n\omega x)dx \end{cases}} \tag{2.1}$$

le réel α étant quelconque.
Les réels $a_n(f)$ pour $n \geq 0$ et $b_n(f)$ pour $n \geq 1$ sont appelés *coefficients de Fourier réels de f*. On les note plus simplement a_n et b_n lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

Proposition 2.2.1 *Les coefficients de Fourier de f ne dépendent pas du choix du réel α.*

Preuve
Pour tout $n \geq 0$, posons $F_n(x) = f(x)\cos(n\omega x)$. Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_\alpha^{\alpha+T} F_n(x)dx = \int_\alpha^0 F_n(x)dx + \int_0^T F_n(x)dx + \int_T^{\alpha+T} F_n(x)dx.$$

Effectuons le changement de variable $u = x - T$ dans la dernière intégrale :

$$\int_T^{\alpha+T} F_n(x)dx = \int_0^\alpha F_n(u+T)du.$$

Comme F_n est T-périodique, cela donne finalement :

$$\int_T^{\alpha+T} F_n(x)dx = \int_0^\alpha F_n(u)du,$$

et donc

$$\int_\alpha^{\alpha+T} F_n(x)dx = \int_0^T F_n(x)dx,$$

ce qui montre que a_n ne dépend pas du choix de α.
Le même raisonnement s'applique aux coefficients b_n, $n \geq 1$. ■

2.2.2 Théorème de convergence

Théorème 2.2.1 *(de Dirichlet). Soit f une fonction T-périodique vérifiant les 2 hypothèses suivantes :*

- *f est continue sur tout intervalle du type $[\alpha, \alpha+T]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels f possède une limite à gauche et une limite à droite (notées respectivement $f(x^-)$ et $f(x^+)$) ;*
- *f possède en tout point de $[\alpha, \alpha+T]$, une dérivée à gauche et une dérivée à droite.*

Alors, la S.F. de f converge sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)}$$

Remarque 2.2.1 *Les hypothèses du théorème 2.2.1 sont assez compliquées, mais on peut remarquer qu'elles sont vérifiées par toute fonction f de classe C^1 sur $]\alpha, \alpha+T[$, ce qui est le cas des fonctions qui seront utilisées dans la pratique.*

Supposons maintenant que f satisfait les hypothèses du théorème 2.2.1.
Alors, <u>en tout point x en lequel f est continue</u>, on a $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = f(x)$, soit :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right).$$

En un tel point, la fonction f se décompose donc en la somme :

- d'un terme constant, a_0, qui est la *valeur moyenne de f sur une période* ;
- d'une infinité de termes sinusoïdaux, $a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$, appelés *harmoniques*.

On dira que *f est développable en série de Fourier* (DSF en abrégé) si elle égale à la somme de sa série de Fourier en tout point x. D'après ce que l'on vient de voir, toute fonction continue vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.1 est effectivement DSF.

Exemple. (signal carré). On considère la fonction T-périodique appelée “signal carré”, qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \frac{T}{2}[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } x \in]-\frac{T}{2}, 0[. \end{cases}$$

Calculer sa S.F.

2.2.3 Ecriture complexe de la S.F.

Pour tout $n \geq 1$, les formules d'Euler entraînent :

$$\begin{aligned} u_n(x) &= a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \\ &= a_n \frac{\mathrm{e}^{jn\omega x} + \mathrm{e}^{-jn\omega x}}{2} + b_n \frac{\mathrm{e}^{jn\omega x} - \mathrm{e}^{-jn\omega x}}{2j} \\ &= \underbrace{\frac{a_n - jb_n}{2}}_{c_n} \mathrm{e}^{jn\omega x} + \underbrace{\frac{a_n + jb_n}{2}}_{\overline{c_n}} \mathrm{e}^{-jn\omega x}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a donc :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} \underbrace{(\cos(n\omega x) - j\sin(n\omega x))}_{\mathrm{e}^{-jn\omega x}} f(x)dx = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\mathrm{e}^{-jn\omega x} dx.$$

Ainsi, pour chaque $n \geq 1$, on vérifie que

$$\overline{c_n} = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} \underbrace{\overline{f(x)\mathrm{e}^{-jn\omega x}}}_{f(x)\mathrm{e}^{jn\omega x}} dx = c_{-n}.$$

En convenant que $c_0 = a_0 = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx$, on peut donc finalement poser en toute généralité :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}\,,\ c_n = \frac{1}{T} \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\mathrm{e}^{-jn\omega x} dx.}$$

Avec ces notations, il résulte alors de (2.2) que toute fonction f DSF, vérifie :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega x}.}$$

2.2.4 Propriétés des coefficients de Fourier

On considère à nouveau une fonction f, DSF, de sorte que l'on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{jn\omega x}.$$

Comportement asymptotique

Il s'agit de décrire ici le comportement de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et celui de la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers l'infini. On admet en fait que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0}$$

soit, de façon équivalente,

$$\boxed{\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0.}$$

Parité

Supposons que f est une fonction paire.
Pour tout $n \geq 1$, on obtient, en choisissant $\alpha = -\frac{T}{2}$ dans (2.1) comme cela est autorisé par la proposition 2.2.1 :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\sin(n\omega x)dx + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx\right]. \end{aligned}$$

Or, en effectuant le changement de variable $t = -x$ dans la première des deux intégrales précédentes, il vient :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\sin(n\omega x)dx = \int_{\frac{T}{2}}^{0} \underbrace{f(-y)}_{f(y)}\underbrace{\sin(-n\omega y)}_{-\sin(n\omega y)}(-dy) = -\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(y)\sin(n\omega y)dy,$$

ce qui entraîne évidemment $b_n = 0$. De même, en choisissant à nouveau $\alpha = -\frac{T}{2}$ dans (2.1) on a pour chaque entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx \\ &= \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\cos(n\omega x)dx + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx\right], \end{aligned}$$

avec

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(x)\cos(n\omega x)dx = \int_{\frac{T}{2}}^{0} \underbrace{f(-y)}_{f(y)}\underbrace{\cos(-n\omega y)}_{\cos(n\omega y)}(-dy) = \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(y)\cos(n\omega y)dy,$$

et donc $a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx$.
En résumé, lorsque <u>f est une fonction paire</u> :

$$\boxed{\begin{cases} b_n = 0, \ \forall n \geq 0 \\ a_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \\ a_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)dx, \ \forall n \geq 1. \end{cases}}$$

On démontrerait de même que si <u>f est une fonction impaire</u> :

$$\boxed{\begin{cases} a_n = 0, \ \forall n \geq 0 \\ b_n = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)dx, \ \forall n \geq 1. \end{cases}}$$

Translation

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g(x) = f(x-a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comme f est T-périodique, il est clair que g est également T-périodique. Supposons de plus que f est DSF.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{jn\omega x}.$$

Comme g hérite des propriétés de f (puisque c'est la fonction f décalée de a unités vers la droite), la fonction g est également DSF. Il existe donc une suite de coefficients complexes $(c_n(g))_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\mathrm{e}^{jn\omega x}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a par définition :

$$\begin{aligned}
c_n(g) &= \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} \underbrace{g(x)}_{f(x-a)}\ \mathrm{e}^{-jn\omega x}dx \\
&\overset{u=x-a}{=} \frac{1}{T}\int_{\alpha-a}^{\alpha-a+T} f(u)\mathrm{e}^{-jn\omega(u+a)}du \\
&= \mathrm{e}^{-jn\omega a} \times \underbrace{\frac{1}{T}\int_\beta^{\beta+T} f(u)\mathrm{e}^{-jn\omega u}du}_{c_n(f)} \text{ avec } \beta = \alpha - a \\
&= \mathrm{e}^{-jn\omega a}c_n(f).
\end{aligned}$$

Par suite, on a démonté l'implication :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x-a)) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(g) = \mathrm{e}^{-jn\omega a}c_n(f))}$$

Il découle donc de ceci que pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$|c_n(g)| = |c_n(f)|. \tag{2.3}$$

Application : spectre de fréquence. On appelle *spectre de fréquence de f* le diagramme en bâtons obtenu en représentant $|c_n(f)|$ en fonction de $n \in \mathbb{Z}$. Comme il a déjà été signalé que

$$\begin{cases} c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)} \\ \lim\limits_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0, \end{cases}$$

ce diagramme est symétrique par rapport à l'origine et la hauteur des bâtons tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
De plus, l'égalité (2.3) établit que :

$$\boxed{\text{Tout changement d'origine laisse le spectre de fréquence invariant.}}$$

2.3 Opérations sur les coefficients de Fourier

2.3.1 Le théorème de Bessel-Parseval

Enoncé du théorème (admis)

Théorème 2.3.1 *(de Bessel-Parseval). Soit f une fonction T-périodique et intégrable sur tout intervalle $[\alpha, \alpha+T]$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, on l'égalité*

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2+b_n^2}{2}.$$

Remarque 2.3.1 *L'application du théorème 2.3.1, ne nécessite pas que f soit DSF. En fait, dans ce théorème les hypothèses faites sur f (tout particulièrement celle d'intégrabilité sur tout intervalle fermé borné de longueur T) garantissent simplement que les coefficients de Fourier de f existent. Mais cela n'implique pas forcément que la S.F. de f soit convergente, ni même, quand bien même elle le serait, que la somme de cette série coïncide avec f.*

Interprétation

La fonction f représentant un signal "physique" T-périodique, la quantité

$$E(f) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt,$$

est *l'énergie du signal f*. Ainsi, pour chaque $n \geq 1$, l'harmonique de rang n, $f_n(t) = a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$, a pour énergie :

$$E(f_n) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f_n^2(t)dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} \left[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right]^2 dt = E_n(f).$$

Par suite, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
E_n(f) &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left[a_n^2\underbrace{\cos^2(n\omega t)}_{\frac{1+\cos(2n\omega t)}{2}} + 2a_nb_n\underbrace{\cos(n\omega t)\sin(n\omega t)}_{\frac{\sin(2n\omega t)}{2}} + b_n^2\underbrace{\sin^2(n\omega t)}_{\frac{1-\cos(2n\omega t)}{2}}\right]dt \\
&= \frac{1}{T}\left\{\frac{a_n^2}{2}\underbrace{\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left[1+\cos(2n\omega t)\right]dt}_{T} + a_nb_n\underbrace{\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin(2n\omega t)dt}_{0} + \frac{b_n^2}{2}\underbrace{\int_{\alpha}^{\alpha+T}\left[1-\cos(2n\omega t)\right]dt}_{T}\right\} \\
&= \frac{a_n^2+b_n^2}{2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme la valeur moyenne du signal f sur une période sécrit

$$f_{moy} = \underbrace{\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt}_{a_0},$$

l'égalité du théorème 2.3.1 se réecrit sous la forme équivalente suivante :

$$\boxed{E(f) = (f_{moy})^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(f).}$$

Exemple. En appliquant le théorème 2.3.1 à la fonction 2π-périodique f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\pi, +\pi[\\ 0 & \text{si } x = \pm\pi, \end{cases}$$

démontrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.3.2 Dérivation

Proposition 2.3.1 *Soit f une fonction T-périodique et de classe C^1 sur $]\alpha, \alpha+T[$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :*

- *la dérivée f' de f est T-périodique*
- *f et f' ont toutes deux des coefficients de Fourier, qui satisfont :*

$$\boxed{a_0(f') = 0,} \tag{2.4}$$

et

$$\boxed{\forall n \geq 1, \begin{cases} a_n(f') &= n\omega b_n(f) \\ b_n(f') &= -n\omega a_n(f). \end{cases}} \tag{2.5}$$

Preuve

■

Remarque 2.3.2 *Dans le cas particulier où f et f' sont toutes les deux DSF, on a pour chaque $x \in]\alpha, \alpha + T[$:*

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)\right], \tag{2.6}$$

ainsi que $f'(x) = a_0(f') + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n(f')\cos(n\omega x) + b_n(f')\sin(n\omega x)\right]$. *Compte tenu des égalités (2.4) et (2.5), on peut donc écrire :*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-n\omega a_n(f)\sin(n\omega x) + n\omega b_n(f)\cos(n\omega x)\right]. \tag{2.7}$$

On constate donc que l'écriture (2.7) s'obtient simplement en dérivant formellement (2.6) par rapport à x.

Exemple. Déduire du développement en S.F. de la fonction 2π-périodique $g(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, +\pi]$, celui de la fonction 2π-périodique suivante :

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

2.3.3 Intégration

Soit f une fonction T-périodique et DSF.
On suppose de plus que f possède une primitive, notée F.
Si l'on veut pouvoir développer F en S.F., il faut déjà s'assurer que F est T-périodique. Or, pour tout

$x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} \underbrace{F'(t)}_{f(t)}\, dt = T\, \underbrace{a_0(f)}_{f_{moy}}.$$

Par suite : $\boxed{(F \text{ est } T\text{-périodique}) \iff (f_{moy} = 0).}$
Dans le cas où f vérifie cette condition, on admettra que F est DSF, et que :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \begin{cases} a_n(F) & = & -\frac{1}{n\omega} b_n(f) \\ b_n(F) & = & \frac{1}{n\omega} a_n(f). \end{cases}} \tag{2.8}$$

Exemple. Calculer le développement en S.F. de la fonction 2π-périodique définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ sur $]-\pi, +\pi[$.

Chapitre 3

Transformation de Fourier

3.1 Généralités

3.1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

(*i*) f est de classe C^1 sur tout intervalle du type $[-a, +a]$ pour tout réel positif a, sauf éventuellement en un nombre fini de points x en lesquels f possède une limite à gauche notée $f(x^-)$ et une limite à droite notée $f(x^+)$;

(*ii*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$ converge.

On appelle alors *transformée de Fourier de f* (T.F. de f en abrégé) la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx.$$

La fonction $\mathcal{F} : f \mapsto F$ est appelée *transformation de Fourier*, de sorte que l'on peut écrire :

$$F = \mathcal{F}(f).$$

Remarque 3.1.1 *Si f est paire, il découle simplement de la définition de $F = \mathcal{F}(f)$:*

$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ F(\lambda) = 2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\lambda x)dx.$$

Et lorsque f est impaire, on a de façon analogue :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R},\ F(\lambda) = -2j\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\lambda x)dx.$$

3.1.2 Première propriétés

Proposition 3.1.1 *Soit f une fonction vérifiant les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1. Alors, la transformée de Fourier $F = \mathcal{F}(f)$ satisfait :*

$$\begin{array}{ll} (a) & F \text{ est bornée et continue sur } \mathbb{R}\,; \\ (b) & \displaystyle\lim_{|\lambda|\to+\infty} |F(\lambda)| = 0. \end{array}$$

Preuve
On va démontrer uniquement que F est bornée sur $\mathbb{R}$, les autres résultats étant admis.

■

3.1.3 Exemple : de la fonction porte à la distribution de Dirac

Pour tout $T > 0$, on définit la *fontion porte de largeur T* :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Cette définition assure ainsi que la "masse de f_T sur $\mathbb{R}$" est égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)dx = 1.$$

Si $T = 1$, f_1 s'appelle la "fonction porte". On la note P. Pour tout $T > 0$ on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_T(x) = \frac{1}{T} P\left(\frac{x}{T}\right).$$

De plus, f_T vérifie les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1, donc elle possède une transformée de Fourier, F_T :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ F_T(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x) \mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x} dx = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi\lambda x)\, dx = \begin{cases} \frac{\sin(\pi\lambda T)}{\pi\lambda T} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

Lorsque $T \to 0$, f_T tend vers une limite δ qui n'est plus une fonction : elle s'appelle *distribution de Dirac* :

$$\delta = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} P\left(\frac{x}{T}\right).$$

Comme $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{x}{T}\right)dx = 1$ pout tout $T > 0$, on aura à la limite :

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx = 1}_{\text{notation abusive car } \delta \text{ n'est pas une fonction}} \qquad .$$

On a donc :

$$\mathcal{F}(\delta)(\lambda) = \lim_{T\to 0}\underbrace{\mathcal{F}(f_T)}_{F_T}(\lambda) = \lim_{T\to 0}\frac{\sin(\pi\lambda T)}{\pi\lambda T} = 1.$$

En résumé :

$$\boxed{\mathcal{F}(\delta) = 1.}$$

3.1.4 Formule de Parseval

Théorème 3.1.1 $\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx < +\infty\right) \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2d\lambda\right).$

Exemple. A partir de la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T^2(x)dx$ pour $T > 0$, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du = \pi.$

3.2 Inversion de $\mathcal{F}$

3.2.1 Formule d'inversion

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1.
Il existe une transformation, notée $\mathcal{F}^{-1}$, qui permet de passer de $F = \mathcal{F}(f)$ à la fonction f : $f = \mathcal{F}^{-1}(F)$.
Cette transformation $\mathcal{F}^{-1}$ s'appelle *transformation de Fourier inverse.*
On démontre que :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{j2\pi\lambda x}d\lambda = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.} \tag{3.1}$$

Par suite, en tout point x en lequel f est continue, on a l'équivalence :

$$\boxed{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{j2\pi\lambda x}d\lambda = f(x)\right) \Longleftrightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx = F(\lambda)\right).} \tag{3.2}$$

De là, il découle que si f est continue au point x :

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(F)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{j2\pi\lambda x}\, d\lambda} \tag{3.3}$$

3.2.2 Exemple

Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi$.

On a vu que $\mathcal{F}(P)(\lambda) = \dfrac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, cette fonction étant prolongée par continuité en $\lambda = 0$, ce qui sera implicite dans la suite. Compte tenu de (3.1), il vient donc :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\lambda \mapsto \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\right)(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } |x| \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } |x| = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Par suite, pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$, il découle de (3.3) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda}\mathrm{e}^{j2\pi\lambda x} d\lambda = 1.$$

En particulier, si $x = 0$, cette égalité devient $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi\lambda} d\lambda = 1$, ce qui, en effectuant le changement le changement de variable $u = \pi\lambda$, entraîne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi.$$

3.3 Propriétés de $\mathcal{F}$

3.3.1 Remarque préliminaire

On a vu au §3.2 que si f est continue en $x \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\mathrm{e}^{j2\pi\lambda x} d\lambda = f(x)\right) \Longleftrightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x} dx = F(\lambda)\right).$$

Ceci montre que l'on "passe" de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}^{-1}$ en changeant :

1. f en F ;
2. x en λ ;
3. j en $-j$.

Ainsi, toutes les propriétés de la transformation $\mathcal{F}$ qui vont être établies dans la suite de ce paragraphe, sont également valables pour $\mathcal{F}^{-1}$ moyennant les 3 modifications précédentes.

3.3.2 Linéarité

Soient f et g deux fonctions satisfaisant les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1, ainsi que $F = \mathcal{F}f$ et $G = \mathcal{F}g$.
Il découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale, que, pour tous complexes α et β, on a :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} \mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G \\ \mathcal{F}^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha f + \beta g. \end{array}\right.}$$

3.3.3 Changement d'origine

Soient f une fonction satisfaisant les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1 et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on note g la fonction f "décalée de x_0 unités vers la droite" :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x - x_0).$$

Il est alors clair qu'elle vérifie également les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1. De plus, en conservant les notations $F = \mathcal{F}f$ et $G = \mathcal{F}g$, on a :

$$\begin{array}{rcl} G(\lambda) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx \\ & \stackrel{t=x-x_0}{=} & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda(t+x_0)}dt \\ & = & \mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x_0}F(\lambda). \end{array}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{\mathcal{F}[f(x - x_0)](\lambda) = \mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x_0}F(\lambda).}$$

3.3.4 Changement d'origine

Soient f une fonction satisfaisant les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1 et $a \in \mathbb{R}^*$.
Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(ax)$.
Il est alors clair qu'elle vérifie également les hypothèses (i) et (ii) du §3.1.1. De plus, en posant à nouveau $F = \mathcal{F}f$ et $G = \mathcal{F}g$, on a :

$$\begin{array}{rcl} G(\lambda) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx \\ & \stackrel{y=ax}{=} & \displaystyle\int_{-sgn(a)\infty}^{sgn(a)\infty} f(y)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda\frac{y}{a}}\frac{dy}{a} \\ & = & \displaystyle\frac{sgn(a)}{a}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda\frac{y}{a}}dy}_{F\left(\frac{\lambda}{a}\right)}. \end{array}$$

En conclusion :

$$\boxed{\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\lambda}{a}\right).}$$

3.3.5 Transformation de la dérivée

Soit f une fonction dérivable. Lorsque la transformée de Fourier de f existe alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ car f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, si f' possède également une transformée de Fourier, on obtient, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx \\
&= \underbrace{\left[f(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + 2\pi\lambda j\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-j2\pi\lambda x}dx,
\end{aligned}$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathcal{F}[f'](\lambda) = 2\pi\lambda j F(\lambda).}$$

Généralisation. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on démontre par récurrence sur l'entier n que :

$$\boxed{\mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (2\pi\lambda j)^n F(\lambda).}$$

3.3.6 Convolution

Définition

Soient f et g deux fonctions absolument intégrables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\boxed{(f\star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.}$$

La fonction $f\star g$ ainsi créée s'appelle *convolée de f et g*.

Remarque 3.3.1 *La convolution $\star$ est commutative : $f\star g = g\star f$.*
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
(f\star g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \\
&\overset{u=x-t}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)(-du) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)f(x-u)du \\
&= (g\star f)(x).
\end{aligned}$$

T.F. et convolution

On admet que la transformation de Fourier échange le produit et la convolution :

$$\boxed{\mathcal{F}(f \star g) = F \times G.}$$

Chapitre 4

Transformation de Laplace

4.1 Intégrale de Laplace

4.1.1 Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = 0$ si $x < 0$, satisfaisant les deux conditions suivantes :

(i) f est continue sur tout intervalle du type $[0, +a]$ pour tout réel positif a, sauf éventuellement en un nombre fini de points x en lesquels f possède une limite à gauche notée $f(x^-)$ et une limite à droite notée $f(x^+)$;

(ii) il existe $C \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $M > 0$ tels que : $\forall x \geq M,\ |f(x)| \leq C\mathrm{e}^{\alpha x}$.

On appelle alors *transformée de Laplace de f* (T.L. de f en abrégé) la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} F & : & \{p \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,(p) > \alpha\} & \to & \mathbb{C} \\ & & p & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-px}dx. \end{array}$$

Remarque 4.1.1 *La fonction $p \mapsto F(p)$ est bien définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,(p) > \alpha$.*
En effet, pour tout $x \geq M$, on a :

$$|(1+x^2)\mathrm{e}^{-px}f(x)| = (1+x^2)\underbrace{|\mathrm{e}^{-px}|}_{\leq C\mathrm{e}^{\alpha x}}\ \ \underbrace{|f(x)|}_{\leq \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(p)x}\underbrace{|\mathrm{e}^{-j\mathrm{Im}(p)x}|}_{=1}} \leq C(1+x^2)\mathrm{e}^{\overbrace{(\alpha - \mathrm{Re}\,(p))}^{<0}x} \overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, $|\mathrm{e}^{-px}f(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}$ *dès que x est assez grand. Et comme* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ *converge alors* $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px}f(x)dx$ *converge également.*

L'application $\mathcal{L} : f \mapsto F$ est appelée *transformation de Laplace*, et l'on peut donc écrire :

$$F = \mathcal{F}(f).$$

La fonction F s'appelle aussi parfois *l'image de f* et on note alors $F(p) \sqsubset f(x)$.

4.1.2 Exemples

Echelon unité

La fonction *échelon unité*, notée $\mathcal{U}$, est d éfinie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $X \geq 0$, on a donc :

$$\int_0^X \mathrm{e}^{-px}\mathcal{U}(x)dx = \int_0^X \mathrm{e}^{-px}dx = \begin{cases} \frac{1-\mathrm{e}^{-pX}}{p} & \text{si } p \neq 0 \\ X & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Comme il est bien connu que $\mathrm{e}^{-pX} \overset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $\mathrm{Re}\,(p) > 0$ et que cette fonction n'a pas de limite sinon (sauf dans le cas très particulier où $a = p$), on en déduit :

$$\boxed{\mathcal{L}\,(\mathcal{U})\,(p) = \tfrac{1}{p},\ \mathrm{Re}\,(p) > 0.}$$

Fonction $\mathrm{e}^{ax}, a \in \mathbb{C}$

Il s'agit de calculer la transformée de Laplace de la fontion $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\mathcal{U}(x)$. Pour tout $X \geq 0$, on a :

$$\int_0^X \mathrm{e}^{-px}\mathrm{e}^{ax}\mathcal{U}(x)dx = \int_0^X \mathrm{e}^{-(p-a)x}dx = \begin{cases} \frac{1-\mathrm{e}^{-(p-a)X}}{p-a} & \text{si } a-p \neq 0 \\ X & \text{si } a-p = 0. \end{cases}$$

Comme il est bien connu que $\mathrm{e}^{-(p-a)X} \overset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si $\mathrm{Re}\,(p-a) > 0$, c'est-à-dire si $\mathrm{Re}\,(p) > \mathrm{Re}\,(a)$, et que cette fonction n'a pas de limite sinon, on en déduit :

$$\boxed{\mathcal{L}\,(\mathrm{e}^{ax}\mathcal{U})\,(p) = \tfrac{1}{p-a},\ \mathrm{Re}\,(p) > \mathrm{Re}\,(a)\,.} \tag{4.1}$$

Distribution de Dirac

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on pose, par analogie avec ce qui a été fait au §3.1.3 :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $X \geq \varepsilon$, on a donc :

$$\int_0^X \mathrm{e}^{-px}(x)f_\varepsilon dx = \int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{e}^{-px}}{\varepsilon}dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \mathrm{e}^{-px}dx = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\frac{1-\mathrm{e}^{-p\varepsilon}}{p} & \text{si } p \neq 0 \\ 1 & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Comme ce résultat est indépendant de X, on en déduit :

$$\mathcal{L}\,(f_\varepsilon)\,(p) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{1-\mathrm{e}^{-p\varepsilon}}{p},\ \forall p \neq 0.$$

Or, lorsque ε tend vers 0 (par valeurs supérieures), on sait que $f_\varepsilon \to \delta$, ce qui (on l'admettra) entraîne :

$$\mathcal{L}(\delta)(p) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{1 - \mathrm{e}^{-p\varepsilon}}{p} \right) = 1.$$

Par suite :

$$\boxed{\mathcal{L}(\delta)(p) = 1, \ \forall p \in \mathbb{C}.}$$

Fonction puissance

Quel que soit $n \geq 1$, on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} x^n dx$ converge si $\mathrm{Re}(p) > 0$. De plus, pour tout complexe p tel que $\mathrm{Re}(p) > 0$, on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} x^n dx = \underbrace{\left[x^n \frac{\mathrm{e}^{-px}}{-p} \right]_0^{+\infty}}_{0} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-px}}{-p} n x^{n-1} dx = \frac{n}{p} \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} x^{n-1} dx}_{I_{n-1}},$$

donc $I_n = \frac{n!}{p^n} I_0$ avec $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} dx = \frac{1}{p}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{L}(x^n \mathcal{U})(p) = \tfrac{n!}{p^{n+1}}, \ \mathrm{Re}(p) > 0.}$$

4.2 Propriétés de $\mathcal{L}$

4.2.1 Linéarité

Si f et g sont deux fonctions satisfaisant les hypothèses (i) et (ii) du §4.1.1, on a de façon évidente :

$$\boxed{\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g).}$$

Exemple. Soit $\omega > 0$. D'après (4.1), $\mathcal{L}(\mathrm{e}^{\pm j\omega x}\mathcal{U})(p) = \frac{1}{p \mp j\omega}$ pour tout $p \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\mathrm{Re}(p) > \underbrace{\mathrm{Re}(j\omega)}_{0}$. Par suite, il découle des formules d'Euler et de la linéarité de $\mathcal{L}$, que :

$$\mathcal{L}(\cos(\omega x)\mathcal{U})(p) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{j\omega x}\mathcal{U}\right)(p) + \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathcal{U}\right)(p)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega}\right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \ \mathrm{Re}(p) > 0,$$

et

$$\mathcal{L}(\sin(\omega x)\mathcal{U})(p) = \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{j\omega x}\mathcal{U}\right)(p) - \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{-j\omega x}\mathcal{U}\right)(p)\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right] = \frac{w}{p^2 + \omega^2}, \ \mathrm{Re}(p) > 0.$$

4.2.2 Image de $f(ax)$

La fonction f satisfaisant toujours les hypothèses (i) et (ii) du §4.1.1, il s'agit de calculer la T.L. de $g : x \mapsto f(ax)$, où a est un réel fixé non nul, en fonction de celle de la fonction f. En fait :

$$\mathcal{L}\left(g\right)(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} f(ax)dx \overset{y=ax}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} f(ax)dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-p\frac{y}{a}} f(y)\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{p}{a}y} f(y)dy}_{\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)},$$

ce qui entraîne :

$$\boxed{\mathcal{L}[f(ax)](p) = \tfrac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\tfrac{p}{a}\right).}$$

4.2.3 Changement d'origine

Soit f une fonction satisfaisant les hypothèses (i) et (ii) du §4.1.1 et $x_0 > 0$. Pour tout réel x, on pose

$$h(x) = f(x - x_0)\mathcal{U}(x - x_0) = \begin{cases} f(x - x_0) & \text{si } x \geq x_0 \\ 0 & \text{si } x < x_0. \end{cases}$$

Pour tout complexe p, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(h\right)(p) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} f(x - x_0)\mathcal{U}(x - x_0)dx \\ &= \int_{x_0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} f(x - x_0)dx \\ &\overset{t=x-x_0}{=} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-p(t+x_0)} f(t)dt \\ &= \mathrm{e}^{-px_0}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)dt, \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(f(x - x_0)\mathcal{U}(x - x_0)\right)(p) = \mathrm{e}^{-px_0}\mathcal{L}\left(f\right)(p).}$$

Application : transformée d'une fonction périodique. Soit f une fonction T-périodique ($T > 0$), définie sur $\mathbb{R}_+$, et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$. On pose alors :

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $x \geq 0$, on a donc $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_0(x - nT)$, d'où, compte tenu de la linéarité de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\left(f\right)(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\mathcal{L}\left(f_0(x - nT)\right)(p)}_{\mathrm{e}^{-pnT}\mathcal{L}(f_0)(p)} = \mathcal{L}\left(f_0\right)(p)\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-pnT}\right].$$

Or, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-pnT}$, qui n'est définie que si $\mathrm{Re}\,(p) > 0$, vaut $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{pT}}$, donc :

$$\boxed{\mathcal{L}\,(f)\,(p) = \frac{\mathcal{L}(f_0)(p)}{1-\mathrm{e}^{pT}},\ \mathrm{Re}\,(p) > 0.}$$

Exemple. On prend $T = 2$, f_0 étant égale à la restriction à $[0, 2]$ de la fonction porte de largeur 1.

4.2.4 Transformation de la dérivée

Soit f une fonction dérivable telle que la dérivée f' de f est continue sur tout intervalle du type $[0, x_0]$, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Il vient alors, en intégrant par parties :

$$\mathcal{F}(f')(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} f'(x)dx = \left[\mathrm{e}^{-px} f(x)\right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px} f(x)dx.$$

Or, compte tenu des hypothèses (i) et (ii) du §4.1.1, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-px} f(x) = 0$ dès que $\mathrm{Re}\,(p)$ est assez grand. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{L}[f'](p) = p\mathcal{L}[f](p) - f(0^+) \text{ si } \mathrm{Re}\,(p) \text{ est assez grand.}}$$

Généralisation. Si f'' vérifie les hypothèses précédentes, on aura, par analogie avec ce qui vient dêtre fait :

$$\mathcal{L}[f''](p) = p \underbrace{\mathcal{L}[f'](p)}_{p\mathcal{L}[f](p)-f(0^+)} - f'(0^+) = p^2\mathcal{L}[f](p) - pf(0^+) - f'(0^+).$$

Et plus généralement, si $f^{(n)}$, $n \geq 2$, vérifie les hypothèses précédentes, on aura :

$$\boxed{\mathcal{L}[f^{(n)}](p) = p^n\mathcal{L}[f](p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - \ldots - pf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)}$$

En particulier, lorsque $f(0^+) = f'(0^+) = \ldots = f^{(n-1)}(0^+) = 0$, l'égalité précédente se résume à :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](p) = p^n\mathcal{L}[f](p),$$

ce qui permet d'écrire que

$\boxed{\text{La T.L. transforme la dérivation en multiplication par } p}$.

4.2.5 Transformation de la primitive

Si $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$, on sait que $\varphi(0^+) = 0$ et que φ est dérivable de dérivée $\varphi'(x) = f(x)$. Ainsi, d'après le §4.2.4, on a :

$$\mathcal{L}\underbrace{[\varphi']}_{f}(p) = p\mathcal{L}[\varphi](p),$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{L}[\varphi](p) = \tfrac{\mathcal{L}[f](p)}{p}.}$$

4.3 Transformée de Laplace inverse

4.3.1 Définition

Soit $F = \mathcal{L}[f]$. On appelle *transformée de Laplace inverse* ou *original* de F, la fonction f.
On note alors :

$$f = \mathcal{L}^{-1}[F] \text{ ou } f(x) \sqsupset F(p).$$

On admettra lorsque f vérifie les hypothèses (i) et (ii) du §4.1.1, que cet original est déterminé de façon unique.
Ainsi par exemple, $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = \mathcal{U}$.

4.3.2 Linéarité

Comme pour $\mathcal{F}^{-1}$, on admet que $\mathcal{L}^{-1}$ est linéaire, de sorte que :

$$\mathcal{L}^{-1}[\lambda F + \mu G] = \lambda\mathcal{L}^{-1}[F] + \mu\mathcal{L}^{-1}[G],$$

pour tout λ et μ complexes.

Exemple. Comme $\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2+1)}\right] = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]}_{\mathcal{U}(x)} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+1}\right]}_{\cos x\,\mathcal{U}(x)},$$

donc

$$\mathcal{U}(x)\,(1-\cos x) \sqsupset \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

4.3.3 Calcul pratique d'originaux : formulaire

Ce calcul est basé sur le fait que la transformation inverse $\mathcal{L}^{-1}$ est linéaire, ainsi que sur les résultats donnés par le formulaire suivant. Ses résultats s'obtiennent à l'aide de calculs élémentaires et permettent de calculer les originaux d'expressions du type $F(ap), P(p+p_0), F'(p), \int_p^{+\infty} F(u)du$, etc...

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\mathbf{F}(\mathbf{p})$
$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$		$\dfrac{1}{p}$ pour $\mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\mathrm{e}^{ax}\mathcal{U}(x),\ a \in \mathbb{R}$		$\dfrac{1}{p-a}$ pour $\mathrm{Re}\,(p) > \mathrm{Re}\,(a)$
$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } x \in [0, \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},\ \varepsilon > 0$		$\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p}$ pour $\mathrm{Re}\,(p) > 0$
δ (distribution de Dirac)		1 pour $\mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\cos(\omega x)\mathcal{U}(x),\ \omega \in \mathbb{R}$		$\dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$ pour $\mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\sin(\omega x)\mathcal{U}(x),\ \omega \in \mathbb{R}$		$\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ pour $\mathrm{Re}\,(p) > 0$
$x^n\mathcal{U}(x),\ n \in \mathbb{N}$		$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ pour $\mathrm{Re}\,(p) > 0$
$\lambda f(x) + \mu g(x)$		$\lambda F(p) + \mu G(p)$
$f(ax),\ a \in \mathbb{R}^*$		$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{p}{a}\right)$
$f(x-a)\mathcal{U}(x-a),\ a \in \mathbb{R}$		$\mathrm{e}^{-ap}F(p)$
$\mathrm{e}^{-ax}f(x),\ a \in \mathbb{C}$		$F(p+a)$
$f'(x)$		$pF(p) - f(0^+)$
$-xf(x)$		$F'(p)$
$\displaystyle\int_0^x f(t)dt$		$\dfrac{F(p)}{p}$
$\dfrac{f(x)}{x}$		$\displaystyle\int_p^{+\infty} F(u)du$
$f(x) * g(x)$		$F(p) \times G(p)$

Exemple. Calculer les deux originaux suivants :

– $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p^2+1)}\right](x)$

– $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+p_0}{(p+p_0)^2+\omega^2}\right](x)$.

4.3.4 Application à l'électrocinétique

On étudie la charge $t \mapsto v(t)$ d'un condensateur C à travers une résistance R soumis à une source $t \mapsto e(t)$. Les lois de l'éléctrocinétique assurent que e et v sont liés par l'équation différentielle suivante :

$$RCv'(t) + v(t) = e(t).$$

On suppose que $e(0) = 0$ ce qui entraîne $v(0) = 0$.