Travaux pratiques
Intégration des fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fonction dont l'expression est le quotient de deux polynômes :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n} = \frac{\sum_{k=0}^m a_k x^k}{\sum_{k=0}^n b_k x^k}.$$

Ici m (resp., n) est un entier naturel, appelé degré de A (resp., B) et noté $\deg A$ (resp., $\deg B$), et les a_k (resp., b_k) sont des coefficients réels tels que $a_m \neq 0$ (resp., $b_n \neq 0$).
Ainsi, par exemple, $\frac{x+1}{x^3-1}$, $\frac{x^4+3x-2}{x^2-1}$, $\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$ et $\frac{x^4-x^3-2x^2+8x-2}{x^3-x^2-x+1}$ sont des fractions rationnelles.

Le but de ces deux séances de TP est d'apprendre à intégrer les fractions rationnelles. Dans le cas particulier simple de fractions rationnelles qui s'expriment comme une dérivée logarithmique, cela ne pose pas de problème. C'est le cas par exemple de $\frac{x^2+1}{x^3+3x+2}$, qui s'écrit $\frac{1}{3}\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^3 + 3x + 2$, et dont une primitive est donc $\frac{1}{3}\ln|u(x)| = \frac{1}{3}\ln(x^3 + 3x + 2)$.
Mais dans le cas général (à peu près quasiment tous les autres cas) la méthode consiste à :
- décomposer la fraction rationnelle en (une somme d') éléments simples,
- intégrer ensuite séparément chaque élement simple apparaissant dans la décomposition.

Décomposition en éléments simples.
Pour décomposer la fraction rationnelle $f = \frac{A}{B}$ on commence par déterminer sa partie entière, qui est le polynôme quotient Q dans la division euclidienne de A par B :

$$A = BQ + R, \ \deg R < \deg B.$$

La partie entière de f est donc le polynôme nul si $\deg A < \deg B$.

Exemple. Si $A(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 1$ et $B(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ alors l'égalité de division euclidienne $A(x) = (x-2)B(x) + x^3 + 3$ avec $\deg(x^3+3) < \deg B$, montre que la partie entière de la fraction rationnelle $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ est $x - 2$. On a donc :

$$f(x) = \frac{x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^5 - x^4 - x + 1} = x - 2 + \frac{x^3+3}{x^5 - x^4 - x + 1}. \tag{1}$$

D'une façon générale, on voit que f s'écrit comme la somme d'un polynôme (sa partie entière Q) et d'une fraction rationnelle dont le degré du numérateur $<$ degré du dénominateur :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}, \ \deg R < \deg B. \tag{2}$$

Reste maintenant à décomposer la fraction $\frac{R}{B}$ en éléments simples. Voyons comment on procède sur l'exemple précédent où $R(x) = x^3 + 3$ et $B(x) = x^5 - x^4 - x + 1$.

a) On commence par décomposer B en produit de facteurs irreductibles de $\mathbb{R}[x]$.
Le polynôme $B(x) = x^5 - x^4 - x + 1$ admet 1 comme racine évidente ($B(1) = 0$) donc il est divisible par $x - 1$. En effet, on a $B(x) = (x-1)(x^4 - 1)$. Ensuite, comme $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, on a $B(x) = (x+1)(x-1)^2(x^2+1)$. Comme $x \pm 1$ est de degré 1 alors c'est un polynôme irreductible de $\mathbb{R}[x]$. De même, $x^2 + 1$ est de degré 2 et ne possède pas de racine réelle (ses racines sont $\pm i$) donc il est irreductible dans $\mathbb{R}[x]$ également. Ainsi $(x+1)(x-1)^2(x^2+1)$ est bien la décomposition du polynôme B en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[x]$. On voit donc que B admet deux racines réelles distinctes : -1, qui est racine simple (ou d'ordre 1) et 1, qui est racine double (ou d'ordre 2). Les autres racines de B sont $\pm i$. Elles sont complexes conjuguées, puisque B est à coefficients réels, et chacune d'elle est simple (d'ordre 1) car $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$.

b) La deuxième étape de la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{R}{B}$ en éléments simple consiste à identifier 5 constantes réelles c_j, $j = 1, 2, \ldots, 5$, pour lesquelles on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{B(x)} &= \frac{x^3+3}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{x-1} + \frac{c_3}{(x-1)^2} + \frac{c_4 x + c_5}{x^2+1}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}. \end{aligned} \tag{3}$$

i) $\frac{c_1}{x+1}$ est un élément simple de première espèce (relatif au pôle réel $x = -1$, d'ordre 1) ;

ii) $\frac{c_2}{x-1} + \frac{c_3}{(x-1)^2}$ est la somme d'éléments simples de première espèce (relative au pôle réel $x = 1$, d'ordre 2) ;

iii) $\frac{c_4 x + c_5}{x^2+1}$ est un élément simple de deuxième espèce (relatif au couple de pôles complexes conjugués $x = \pm i$, d'ordre 1).

Commençons par calculer c_1. Pour cela on multiplie les deux termes de l'égalité (3) par $x + 1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} (x+1)\frac{R(x)}{B(x)} &= \frac{x^3+3}{(x-1)^2(x^2+1)} \\ &= c_1 + (x+1)\left(\frac{c_2}{x-1} + \frac{c_3}{(x-1)^2} + \frac{c_4 x + c_5}{x^2+1}\right), \ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \end{aligned}$$

et il suffit ensuite de prendre $x = -1$ dans l'égalité ci-dessus pour obtenir

$$\frac{2}{8} = c_1 + 0,$$

et donc $c_1 = \frac{1}{4}$. Le calcul de c_3 s'effectue de la même façon : on multiplie les deux termes de l'égalité (3) par $(x-1)^2$,

$$\begin{aligned} (x-1)^2\frac{R(x)}{B(x)} &= \frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= c_3 + (x-1)\left(c_2 + (x-1)\left(\frac{c_1}{x+1} + \frac{c_4 x + c_5}{x^2+1}\right)\right), \ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \end{aligned}$$

puis on prend $x = 1$ dans l'égalité obtenue. On obtient ainsi que

$$\frac{4}{4} = c_3 + 0,$$

soit $c_3 = 1$. Pour calculer c_2, dérivons par rapport à x l'égalité entre fractions rationnelles précédente. On obtient pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\underbrace{\left(\frac{x^3+3}{(x+1)(x^2+1)}\right)'}_{\frac{3x^2(x+1)(x^2+1)-(x^3+3)(x^2+1+2x(x+1))}{(x+1)^2(x^2+1)^2}} = c_2 + (x-1)\left(\frac{c_1}{x+1} + \frac{c_4x+c_5}{x^2+1}\right) + (x-1)T(x),$$

où $T(x) = \left(c_2 + (x-1)\left(\frac{c_1}{x+1} + \frac{c_4x+c_5}{x^2+1}\right)\right)'$. En prenant $x = 1$, il vient alors

$$\frac{12-24}{16} = c_2 + 0 + 0,$$

soit $c_2 = -\frac{3}{4}$. Maintenant que c_1, c_2 et c_3 sont connues, on peut calculer c_5 en prenant $x = 0$ dans (3) : on obtient alors

$$\frac{3}{1} = c_1 - c_2 + c_3 + c_5,$$

soit $c_5 = 3 - c_1 + c_2 - c_3 = 3 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 1 = 1$. Enfin, pour calculer c_4, il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité (3) par x, ce qui donne

$$\frac{x(x^3+3)}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{c_1x}{x+1} + \frac{c_2x}{x-1} + \frac{c_3x}{(x-1)^2} + \frac{c_4x^2+c_5x}{x^2+1}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\},$$

puis de faire tendre x vers $+\infty$. On obtient que

$$0 = c_1 + c_2 + 0 \times c_3 + c_4 + 0 \times c_5,$$

soit $c_4 = -(c_1 + c_2) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

En vertu de (1), (2) et (3), la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle f est donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^5 - x^4 - x + 1} \\ &= x - 2 + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+2}{2(x^2+1)}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Intégration.

Par linéarité de l'intégration, on obtient une primitive de f en primitivant chacun des 5 termes apparaissant dans le membre de droite de sa décomposition en éléments simples (4) :

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^5 - x^4 - x + 1} dx \\ = &\int (x-2)dx && \text{(intégration de la partie entière)} \\ &+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx && \text{(int. des e.s. de 1ère espèce)} \\ &+\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx. && \text{(int. des e.s. de 2ème espèce)} \end{aligned}$$

Ensuite, comme $\int (x-2)dx = \frac{x^2}{2} - 2x + C$, $\int \frac{1}{x\pm1}dx = \ln|x\pm1| + C$, $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1} + C$, $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ et $\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C$, où C est une constante réelle arbitraire, il vient :

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^6 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 1}{x^5 - x^4 - x + 1}dx \\
= \;& \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\ln\big(x^2+1\big) + \arctan x + C.
\end{aligned}$$

A vous de jouer maintenant.

Exercice 1. (éléments simples de première espèce uniquement)
Décomposer en éléments simples puis calculer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

i) $f_1(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$ ii) $f_2(x) = \dfrac{x^4}{x^2-1}$

iii) $f_3(x) = \dfrac{x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$ iv) $f_4(x) = \dfrac{x^5}{x^4 - 2x^2 + 1}$.

Exercice 2. (éléments simples de seconde espèce d'ordre 1)

a) Etant donnés $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, montrer en utilisant le changement de variable $y = \frac{x+a}{b}$, que
$$\int \frac{1}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + C,\ C \in \mathbb{R},$$
puis en déduire que $\displaystyle\int \frac{x}{(x+a)^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left((x+a)^2+b^2\right) - \frac{a}{b}\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + C.$

b) Calculer une primitive des fractions rationnelles suivantes :

i) $f_5(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2x+5}$ ii) $f_6(x) = \dfrac{1}{x^3+2x^2+2x}$ iii) $f_7(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$.

Exercice 3. (éléments simples de seconde espèce d'ordre 2)

a) Montrer, en intégrant par parties, que $\displaystyle\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\arctan t - \frac{t}{t^2+1}\right) + C$, où $C \in \mathbb{R}$ est arbitraire, puis en déduire que $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1}\right) + C.$

b) Etant donnés $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$, déduire du a) que
$$\int \frac{1}{\left((x+a)^2+b^2\right)^2}dx = \frac{1}{2b^3}\left(\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + b\frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\right) + C,\ C \in \mathbb{R},$$
et enfin de ce qui précède, que
$$\int \frac{x}{\left((x+a)^2+b^2\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+a)^2+b^2} - \frac{a}{2b^3}\left(\arctan\left(\frac{x+a}{b}\right) + b\frac{x+a}{(x+a)^2+b^2}\right) + C.$$

c) Calculer une primitive de la fraction rationnelle $f_8(x) = \dfrac{1}{x(x^2+x+1)^2}$.