

Travaux dirigés 3

Techniques d'intégration

1) Combinaison linéaire de primitives connues

Exercice 1. Calculer $\int_1^2 \frac{x+3}{x^2} dx$.

Exercice 2. Calculer $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

Exercice 3. Calculer $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x dx$ en utilisant le fait que $\tan' x = 1 + \tan^2 x$ pour tout $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

2) Polynômes trigonométriques

Exercice 4. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos^3 x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos^4 x dx$.

Exercice 5. Après avoir linéarisé $\cos^4 x$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$.

3) Changement de variable

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

a) $\int_1^{3^{1/4}} \frac{x}{1+x^4} dx$ en effectuant le changement de variable $t = x^2$.

b) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ en effectuant le changement de variable $t = e^x$.

c) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ en effectuant le changement de variable $t = \sin x$.

d) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 5} dx$ en effectuant le changement de variable $t = \frac{x+1}{2}$.

e) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ en effectuant le changement de variable $x = \tan t$.

4) Intégration par parties

Exercice 7. Calculer $\int x^3 \ln x dx$.

Exercice 8. Calculer $\int_0^1 e^x x dx$.

Exercice 9. En intégrant deux fois par parties, calculer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx$.

b) $\int_0^1 (1 + x + x^2) \sin x dx$.

5) Fractions rationnelles

Exercice 10. Calculer les primitives suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}$.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{4-x^2}$.

c) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

d) $\int \frac{dx}{x^3+2x+x}$.

Exercice 11. Calculer $\int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^2 x - 1} dx$ en effectuant le changement de variable $t = \tan x$.

Exercice 12. Soit $R(x) = \frac{x^5}{D(x)}$ avec $D(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5$.

a) Montrer que $D(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - 4x + 5)$.

b) En déduire que $R(x) = x + 4 + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{20(x+1)} + \frac{117x-190}{10(x^2-4x+5)}$.

c) Calculer enfin $\int R(x)dx$.

Exercice 13. Calculer les primitives suivantes :

a) $\int \frac{x}{x^2+2x+5} dx$.

b) $\int \frac{5x^4-40}{(x^2-4)^2} dx$.

c) $\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2} dx$.