Travaux dirigés 2

Les fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1. En intégrant par parties, calculer les primitives des fonctions $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$.

Exercice 2. Montrer que l'on a $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Exercice 3. (Calcul de $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, \mathrm{d}\, x$ et $\int \frac{x}{a^2+x^2} \, \mathrm{d}\, x$).

a) Etant donné $a \in]0, +\infty[$, calculer $\int \frac{x}{a^2+x^2} \, \mathrm{d}\, x$.

b) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ et en déduire l'expression de $\int \frac{1}{a^2+x^2} \, \mathrm{d}\, x$.

Exercice 4. (Calcul de $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, \mathrm{d}\, x$ et $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, \mathrm{d}\, x$).

a) Etant donné $a \in]0, +\infty[$, calculer $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, \mathrm{d}\, x$ pour $x \in]-a, a[$.

b) Pour tout $x \in]-a, a[$, calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$ et en déduire l'expression de $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, \mathrm{d}\, x$.

Exercice 5. Montrer que l'on a $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$ pour chaque $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 6. (La fonction $x \mapsto \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante par morceaux sur $\mathbb{R}^*$).

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^*$.

b) En déduire que

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]0, +\infty[, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

Exercice 7. Pour tout $x \in J =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, on pose $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in J$.

b) En déduire que $f(x) = \arctan x + \frac{\pi}{4}$ si $x \in]-\infty, 1[$.

c) Calculer ensuite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire du a) que $f(x) = \arctan x - \frac{3\pi}{4}$ si $x \in]1, +\infty[$.

Exercice 8. On pose $g(x) = 2\sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

a) Calculer $g'(x)$ puis vérifier, en simplifiant l'expression obtenue, que l'on a :

$$g'(x) = -1, \ x \in]-1, 1[.$$

b) En déduire que $g(x) = 1 - x$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Travaux dirigés 2'

Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques

Exercice 9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
a) Vérifier que $\sinh$ est impaire, que $\cosh$ est paire, et que l'on a l'égalité suivante :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

b) En déduire que $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$ et $\sinh x = (\operatorname{sgn} x)\sqrt{\cosh^2 x - 1}$.

Exercice 10. (Fonction $\operatorname{argsinh}$)
a) Calculer la dérivée de $\sinh$.
b) En déduire que $\sinh$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur lui-même.
c) On note $\operatorname{argsinh}$ la fonction réciproque de $\sinh$, définie par l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = \sinh x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{argsinh} y \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

i) Montrer que $\operatorname{argsinh}' y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

ii) En déduire que $\operatorname{argsinh} y = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ pour chaque $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. (Fonction $\operatorname{argcosh}$)
a) Calculer la dérivée de $\cosh$.
b) En déduire que $\cosh$ est une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.
c) On note $\operatorname{argcosh}$ la fonction réciproque de la restriction de $\cosh$ à $[0, +\infty[$, définie par l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = \cosh x \\ x \in [0, +\infty[\end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{argcosh} y \\ y \in [1, +\infty[. \end{cases}$$

i) Montrer que $\operatorname{argcosh}' y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$ pour tout $y \in]1, +\infty[$.

ii) En déduire que $\operatorname{argcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ si $y \in [1, +\infty[$.

Exercice 12. On pose $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) En déduire que $\tanh$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
c) On note $\operatorname{argtanh}$ la fonction réciproque de $\tanh$, définie par l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} y = \tanh x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \operatorname{argtanh} y \\ y \in]-1, 1[. \end{cases}$$

i) Montrer que $\operatorname{argtanh}' y = \frac{1}{1-y^2}$ si $y \in]-1, 1[$.

ii) En déduire que $\operatorname{argtanh} y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ pour tout $y \in]-1, 1[$.