

Travaux dirigés 1

Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordres 1 et 2

Exercice 1. Décrire l'ensemble des solutions de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $2y'(x) + y(x) = 1$

b) $y'(x) + y(x) = x - 1$

c) $y'(x) - y(x) = x^2 + 1$

d) $y'(x) + y(x) = (2x - 1)e^x$

e) $y'(x) - y(x) = (2x + 1)e^x$

f) $y'(x) + y(x) = (3x^2 + 2)e^{-x}$

g) $y'(x) - y(x) = \sin(2x)$

h) $y'(x) - y(x) = (2x + 1)e^x - \sin(2x)$

i) $y'(x) + y(x) = x - e^x + \cos x$

j) $y'(x) - y(x) = \frac{x}{1+x^2}e^x$

k) $y'(x) + y(x) = \frac{1}{x}e^{-x}$

l) $y'(x) + y(x) = (\ln x)e^{-x}$.

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de décrire l'ensemble \mathcal{S} de toutes les fonctions $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur $(0, 1)$, qui vérifient la condition suivante :

$$y'(x) + y(x) = y(0) + y(1), \quad x \in (0, 1).$$

a) Etant donné $c \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = c, \quad x \in (0, 1).$$

b) Caractériser \mathcal{S} en particulierisant le résultat du a) au cas où $c = y(0) + y(1)$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{aligned} a) & \begin{cases} y'(x) - 3y(x) = 4 - 3x \\ y(0) = 0 \end{cases} \\ b) & \begin{cases} 3y'(x) + 4y(x) = (2x + 1)^2 \\ y(-1) = 4 \end{cases} \\ c) & \begin{cases} y'(x) + y(x) = (2x + 3)e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \\ d) & \begin{cases} y'(x) + y(x) = 2 \cos x \\ y(0) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4. Calculer l'ensemble des solutions des équations différentielles du second ordre suivantes :

$$\begin{aligned} a) & y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 10 \\ b) & y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2x + 5 \\ c) & y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 4e^{-x}x \\ d) & y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = (8x + 6)e^x \\ e) & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 4e^{-x}. \\ f) & y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^x \\ g) & y''(x) + y(x) = 3 \cos(2x) \\ h) & y''(x) + 4y(x) = 4 \cos(2x) \\ i) & y''(x) + y(x) = 2 \sin x - 3 \cos(2x) \\ j) & y''(x) + y(x) = 3 \sin^2 x. \end{aligned}$$

Exercice 5. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{aligned} a) & \begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 8x - 4 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \\ b) & \begin{cases} y''(x) + 4y(x) = x^2 + 6 - 4 \sin(2x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \\ c) & \begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 5 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \\ d) & \begin{cases} y''(x) + 4y(x) = -\sin(2x) \\ y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$