Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux & Télécommunications

Année 2018-2019
M 2204
Calculs différentiel et intégral

Travaux dirigés 1

Equations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordres 1 et 2

Exercice 1. *Décrire l'ensemble des solutions des équations différentielles du premier ordre suivantes :*

a) $2y'(x) + y(x) = 1$

b) $y'(x) + y(x) = x - 1$

c) $y'(x) - y(x) = x^2 + 1$

d) $y'(x) + y(x) = (2x - 1)e^x$

e) $y'(x) - y(x) = (2x + 1)e^x$

f) $y'(x) + y(x) = (3x^2 + 2)e^{-x}$

g) $y'(x) - y(x) = \sin(2x)$

h) $y'(x) - y(x) = (2x + 1)e^x - \sin(2x)$

i) $y'(x) + y(x) = x - e^x + \cos x$

j) $y'(x) - y(x) = \frac{x}{1+x^2}e^x$

k) $y'(x) + y(x) = \frac{1}{x}e^{-x}$

l) $y'(x) + y(x) = (\ln x)e^{-x}$.

Exercice 2. *Résoudre les systèmes différentiels du premier ordre suivants :*

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) - 3y(x) & = & -3x + 4 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 3y'(x) + 4y(x) & = & (2x + 1)^2 \\ y(-1) & = & 4 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) + y(x) & = & (2x + 3)e^{-x} \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcl} y'(x) + y(x) & = & 2\cos x \\ y(0) & = & 1. \end{array} \right.$

Exercice 3. *Calculer l'ensemble des solutions des équations différentielles du second ordre suivantes :*

a) $y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 10$

b) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2x + 5$

c) $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 4e^{-x}x$

d) $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = (8x + 6)e^{x}$

e) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 4e^{-x}$.

f) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^{x}$

g) $y''(x) + y(x) = 3\cos(2x)$

h) $y''(x) + 4y(x) = 4\cos(2x)$

i) $y''(x) + y(x) = 2\sin x - 3\cos(2x)$

j) $y''(x) + y(x) = 3\sin^2 x$.

Exercice 4. *Résoudre les systèmes différentiels du second ordre suivants :*

a) $\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) &= 8x - 4 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''(x) + 4y(x) &= x^2 + 6 - 4\sin(2x) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + y(x) &= 5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y''(x) + 4y(x) &= -\sin(2x) \\ y(\pi) &= 1 \\ y'(\pi) &= 1. \end{cases}$

Exercice 5. *L'objectif de cet exercice est de décrire l'ensemble* $\mathcal{S}$ *de toutes les fonctions* $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, *dérivables sur* $(0,1)$, *qui sont solution de l'équation différentielle du premier ordre suivante :*

$$y'(x) + y(x) = y(0) + y(1), \ \ x \in (0,1).$$

a) Etant donné $c \in \mathbb{R}$, *déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle*

$$y'(x) + y(x) = c, \ \ x \in (0,1).$$

b) Caractériser $\mathcal{S}$ *en particularisant le résultat du a) au cas où* $c = y(0) + y(1)$.