Corrigé du test du 13 mars 2018 (TD A)

Exercice 1. L'objectif de cet exercice est de calculer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + 4y(x) = (5x - 3)e^x + 3\sin x. \tag{1}$$

a) Déterminer l'équation caractéristique associée à (1) et calculer ses racines.
L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$ *et elle admet deux racines distinctes* $r_\pm = \pm 2i$.

b) Décrire ensuite l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sans second membre $y''(x) + 4y(x) = 0$.
Les racines de l'équation caractéristique sont complexes, de la forme $r_\pm = 0 \pm 2i$*, donc l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est*

$$\{x \mapsto e^{0x}(\lambda \sin(2x) + \mu\cos(2x)) = \lambda\sin(2x) + \mu\cos(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

c) Calculer, après avoir explicité sa forme générale, une solution particulière de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = (5x - 3)e^x$.
Le second membre est de la forme $P(x)e^{sx}$ *avec* $P \in \mathbb{R}_1[x]$ *et* $s = 1$*. Comme* $s = 1$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de cette équation différentielle sous la forme* $y_{*,1}(x) = (Ax + B)e^x$*. Par un calcul simple, on voit que* $y''_{*,1}(x) = (Ax + 2A + B)e^x$*, ce qui implique que* $y''_{*,1}(x) + 4y_{*,1}(x) = (5Ax + 2A + 5B)e^x$*, et donc* $y_{*,1}$ *est solution particulière de cette équation différentielle si et seulement si on a* $5A = 5$ *et* $2A + 5B = -3$*, c'est-à-dire* $A = 1$ *et* $B = -1$*. Ainsi* $y_{*,1}(x) = (x - 1)e^x$.

d) Même question qu'au c) mais pour $y''(x) + 4y(x) = 3\sin x$.
Ici, le second membre est de la forme $\alpha\sin(\omega x + \varphi) + \beta\cos(\omega x + \varphi)$ *avec* $\alpha = 3$, $\beta = 0$, $\omega = 1$ *et* $\varphi = 0$*. Et comme* $i\omega = i$ *n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de cette équation sous la forme canonique* $y_{*,2}(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B\cos(\omega x + \varphi) = A\sin x + B\cos x$*. Par un calcul rapide on voit alors que* $y''_{*,2}(x) = -A\sin x - B\cos x = -y_{*,2}(x)$*, et donc que* $y''_{*,2}(x) + 4y_{*,2}(x) = 3y_{*,2}(x) = 3A\sin x + 3B\cos x$*. Par suite* $y_{*,2}$ *est solution de cette équation si* $3A = 3$ *et* $3B = 0$*, soit* $A = 1$ *et* $B = 0$*, c'est-à-dire si* $y''_{*,2}(x) = \sin x$.

e) En déduire l'ensemble des solutions de (1).
D'après b) et le principe de superposition, c'est l'ensemble formé par les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\sin(2x) + \mu\cos(2x) + y_{*,1}(x) + y_{*,2}(x)$ *où* λ *et* μ *sont deux constantes réelles arbitraires, soit*

$$\{x \mapsto \lambda\sin(2x) + \mu\cos(2x) + (x - 1)e^x + \sin x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 2. Le but de cet exercice est de simplifier l'expression de $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
On applique la formule $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ *avec* $u(x) = 1-x^2$ *et* $v(x) = 1+x^2$. *Comme* $u'(x) = -2x$ *et que* $v'(x) = 2x$, *on trouve que*

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x(1+x^2+1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

b) Quel est le domaine de définition de la fonction $\arccos$? En déduire celui de la fonction f.
La fonction $\arccos$ *est définie sur* $[-1,1]$. *Mais, comme* $\frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1,1]$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *car* $\left|1-x^2\right| \leq 1+x^2$, *alors* $f(x)$ *est définie pour n'importe quel réel* x.

c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.
D'après la formule de dérivation composée, on a $f'(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \times \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'$. *Ensuite, comme* $\arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ *pour tout* $y \in]-1,1[$, *il résulte de ceci et du a) que*

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \times \left(-\frac{4x}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \times \frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Or, en appliquant la formule $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ *à* $a = 1+x^2$ *et* $b = 1-x^2$, *il vient* $(1+x^2)^2-(1-x^2)^2 = (1+x^2+1-x^2)(1+x^2-(1-x^2)) = 4x^2$ *(on retrouve ce résultat à partir de l'égalité* $(1 \pm x^2)^2 = 1 \pm 2x^2 + x^4$*) donc*

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \times \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\frac{2x}{1+x^2}} \times \frac{4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2},\ x \in [0,+\infty[.$$

d) En déduire l'expression simplifée de $f(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$.
On vient de voir au d) que $f' = 2\arctan'$ *sur l'intervalle* $[0,+\infty[$. *Par suite, il existe* $C \in \mathbb{R}$, *telle que*

$$f(x) = 2\arctan x + C,\ x \in [0,+\infty[.$$

Afin de calculer C, *regardons ce que devient cette égalité si* $x = 0 \in [0,+\infty[$. *Comme* $f(0) = \arccos 1 = 0$ *et* $\arctan 0 = 0$, *on voit que* $C = 2\arctan 0 - f(0) = 0$, *et donc que*

$$f(x) = 2\arctan x,\ x \in [0,+\infty[.$$