# Corrigé du test du 13 mars 2018 (TD B)

**Exercice 1.** On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(x)+y(x) & = & (2x+3)e^x+2\cos x \\ y(0) & = & 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

a) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sans second membre $y'(x)+y(x)=0$.
*C'est* $\{x\mapsto \lambda e^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

b) Calculer, après avoir explicité sa forme générale, une solution particulière de l'équation différentielle $y'(x)+y(x)=(2x+3)e^x$.
*Le second est de la forme* $P(x)e^{sx}$ *où* $P\in\mathbb{R}_1[x]$ *et* $s=1\neq -\frac{b}{a}$, *puisque* $a=b=1$ *ici, alors on peut chercher la solution particulière sous la forme* $y_{*,1}(x)=(Ax+B)e^x$ *avec* $A,B\in\mathbb{R}$. *On a donc* $y'_{*,1}(x)+y_{*,1}(x)=(2Ax+A+2B)e^x$, *ce qui impose* $2A=2$ *et* $A+2B=3$, *soit* $A=B=1$. *Par suite* $y_{*,1}=(x+1)e^x$ *est solution particulière de cette équation différentielle.*

c) Même question qu'au b) mais pour $y'(x)+y(x)=2\cos x$.
*Le second membre est de la forme* $\alpha\sin(\omega x+\varphi)+\beta\cos(\omega x+\varphi)$ *avec* $\alpha=0$, $\beta=2$, $\omega=1$ *et* $\varphi=0$. *On peut donc chercher une solution particulière de cette équation sous la forme* $y_{*,2}(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\cos(\omega x+\varphi)=A\sin x+B\cos x$. *On a donc* $y'_{*,2}(x)+y_{*,2}(x)=(A-B)\sin x+(A+B)\cos x$, *ce qui donne* $A-B=0$ *et* $A+B=2$ *soit* $A=B=1$. *Ainsi* $y_{*,2}(x)=\sin x+\cos x$ *est solution particulière de cette équation différentielle.*

d) Déterminer à partir des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x)+y(x)=(2x+3)e^x+2\cos x$.
*D'après le principe de superposition, la fonction* $y_*(x)=y_{*,1}(x)+y_{*,2}(x)=(x+1)e^x+\sin x+\cos x$ *est solution de l'équation différentielle* $y'(x)+y(x)=(2x+3)e^x+2\cos x$. *D'après a), l'ensemble des solutions est donc* $\{x\mapsto \lambda e^{-x}+(x+1)e^x+\sin x+\cos x,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

e) En déduire que (1) admet une unique solution, que l'on calculera.
*D'après d), l'ensemble des solutions de l'équation différentielle associée à* (1) *est formé par les fonctions de la forme* $y_\lambda(x)=\lambda e^{-x}+(x+1)e^x+\sin x+\cos x$, *où* $\lambda$ *est une constante arbitraire réelle. L'ensemble des solutions de* (1) *est donc celui des fonctions* $y_\lambda$ *vérifiant* $y_\lambda(0)=0$. *Or, comme* $y_\lambda(0)=\lambda+2$, *on voit facilement que le système* (1) *admet une unique solution, qui est* $y_{-2}(x)=-2e^{-x}+(x+1)e^x+\sin x+\cos x$.

**Exercice 2.** L'objectif de cet exercice est de simplifier l'expression de $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

*Il suffit d'appliquer la formule* $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ *avec* $u(x) = x$ *et* $v(x) = \sqrt{1+x^2}$. *Comme* $u'(x) = 1$ *et que* $v'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, *on trouve que*

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

b) Quel est le domaine de définition de la fonction $\arcsin$ ? En déduire celui de la fonction $f$.

*La fonction* $\arcsin$ *est définie sur* $[-1,1]$. *Et comme* $\frac{x}{1+x^2} \in [-1,1]$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *vu que* $x^2 \leq 1+x^2$ *implique* $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1+x^2}$ *car la fonction racine carrée est croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *cela signifie que la fonction* $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$ *est bien définie quel que soit* $x \in \mathbb{R}$.

c) Calculer la dérivée de $f$.

*D'après la formule de dérivation composée, on a* $f'(x) = \arcsin'\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \times \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'$. *Comme* $\arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ *pour tout* $y \in ]-1,1[$, *il résulte de ceci et du a) que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \times \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \times \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}} \times \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{1+x^2} \times \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

d) En déduire l'expression simplifée de $f$.

*On vient de voir au d) que* $f'(x) = \arctan' x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *ce qui implique qu'il existe une constante* $C \in \mathbb{R}$ *telle que*

$$f(x) = \arctan x + C, \ x \in \mathbb{R}.$$

*En particulier, cela implique que* $f(0) = \arctan 0 + C$ *et donc que* $C = f(0) - \arctan 0$. *Or, comme* $\arctan 0 = 0$ *et* $f(0) = \arcsin 0 = 0$, *il vient immédiatement que* $C = 0$. *Par suite,* $f(x) = \arctan x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.