Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux & Télécommunications

Année 2018-2019
M 2204
Calculs différentiel et intégral

Travaux dirigés 1 - correction des exercices 3 et 4

Exercice 3. Il s'agit ici de calculer l'ensemble des solutions des équations différentielles du second ordre suivantes :

a) $\underline{y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 10}$. *L'équation caractéristique est* $r^2 - 4r - 5 = 0$. *Elle possède deux racines complexes conjuguées,* $2 \pm i$, *donc l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc*

$$S_0 = \{x \mapsto (\lambda \sin x + \mu \cos x)e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Le second membre est une constante, qui peut être vue comme un polynôme de degré 0. *Donc, comme* $10 \in \mathbb{R}_0[x]$ *et que le coefficient multiplicatif du terme en* $y(x)$ *dans l'équation différentielle est non nul, on peut chercher une solution particulière* y_* *de l'équation différentielle avec second membre sous la forme d'un polynôme de degré* 0, *c'est-à-dire d'une constante. Or, si* $y_*(x) = A$ *où* $A \in \mathbb{R}$, *alors on a* $y_*'(x) = y_*''(x) = 0$ *et donc* $y_*''(x) - 4y_*'(x) + 5y_*(x) = 5A$. *La fonction* $y_*(x) = A$ *est donc solution de l'équation différentielle avec second membre si et seulement si* $5A = 10$, *c'est-à-dire si* $A = 2$. *Par suite l'ensemble des solutions de l'équation différentielle a) est :*

$$S = \{x \mapsto (\lambda \sin x + \mu \cos x)e^{2x} + 2,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

b) $\underline{y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2x + 5}$. *L'équation caractéristique est* $r^2 - 3r + 2 = 0$. *Elle admet racines réelles distinctes,* 1 *et* 2 *donc l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée à b) est*

$$S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Ensuite, comme $2x + 5 \in \mathbb{R}_1[x]$ *et que le coefficient multiplicatif du terme en* $y(x)$ *dans l'équation différentielle est non nul, on peut chercher une solution particulière* y_* *de l'équation différentielle avec second membre sous la forme d'un polynôme de degré* 1, *c'est-à-dire* $y_*(x) = Ax + B$ *où* $A, B \in \mathbb{R}$. *On a donc* $y_*'(x) = A$ *et* $y_*''(x) = 0$, *ce qui donne* $y_*''(x) - 3y_*'(x) + 2y_*(x) = 2Ax + 2B - 3A$. *La fonction* $y_*(x) = Ax + B$ *est donc solution de l'équation différentielle avec second membre si et seulement si* $2Ax + 2B - 3A = 2x + 5$, *c'est-à-dire si* $2A = 2$ *et* $2B - 3A = 5$, *soit* $A = 1$ *et* $B = 4$. *Autrement dit,* $y_*(x) = x + 4$ *est solution particulière de l'équation différentielle b) et l'ensemble de toutes les solutions est donc*

$$S = \{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x} + x + 4,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

c) $\underline{y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 4xe^{-x}}$. *L'équation caractéristique est* $r^2 + 2r - 3 = 0$. *Elle admet deux racines réelles distinctes, qui sont* -3 *et* 1. *L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc*

$$S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-3x} + \mu e^{x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Le second membre est de la forme $P(x)e^{sx}$ avec $P(x) = 4x \in \mathbb{R}_1[x]$ et $s = -1$. Comme s n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière y_* de l'équation avec second membre sous la forme $y_*(x) = Q(x)e^{sx} = Q(x)e^{-x}$ avec $Q \in \mathbb{R}_1[x]$. Ainsi $Q(x) = Ax + B$, où A et B sont deux constantes réelles à déterminer. Par un calcul direct on obtient facilement que $y_*'(x) = (-Ax + A - B)e^{-x}$ et $y_*''(x) = (Ax - 2A + B)e^{-x}$, et donc $y_*''(x) + 2y_*'(x) - 3y_*(x) = (-4Ax - 4B)e^{-x}$. Comme y_* doit être solution de l'équation avec second membre on a donc nécessairement $(-4Ax - 4B)e^{-x} = 4xe^{-x}$, ce qui implique que $-4Ax - 4B = 4x$. Par conséquent, on a $-4A = 4$ et $-4B = 0$, et donc finalement $A = -1$ et $B = 0$. On a donc obtenu que $y_*(x) = -xe^{-x}$ est solution particulière de l'équation avec second membre, de sorte que l'ensemble cherché des solutions de cette équation différentielle s'écrit :

$$S = \{x \mapsto \lambda e^{-3x} + \mu e^{x} - xe^{-x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

d) $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = (8x + 6)e^x$. *L'ensemble S_0 des solutions de l'équation sans second membre est le même qu'au c). Quant au second membre, il est de la forme $P(x)e^{sx}$ avec $P(x) = 8x + 6 \in \mathbb{R}_1[x]$ et $s = 1$. Ici, s est une racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière y_* de l'équation avec second membre sous la forme $y_*(x) = Q(x)e^{sx} = Q(x)e^{x}$ avec $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ de valuation égale à 1, c'est-à-dire $Q(x) = Ax^2 + Bx$, A et B désignant deux constantes réelles inconnues à déterminer. Un calcul direct donne $y_*'(x) = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x$ et $y_*''(x) = (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x$, de sorte que $y_*''(x) + 2y_*'(x) - 3y_*(x) = (8Ax + 2A + 4B)e^x$. Comme y_* est solution de l'équation avec second membre, on a donc nécessairement $(8Ax + 2A + 4B)e^x = (8x + 6)e^x$, ce qui implique que $8Ax + 2A + 4B = 8x + 6$. Par conséquent, $8A = 8$ et $2A + 4B = 6$, donc $A = 1$ et $B = 1$. Ainsi $y_*(x) = (x + 1)e^x$ est une solution particulière de l'équation avec second membre et l'ensemble de toutes les solutions de cette équation différentielle est*

$$S = \{x \mapsto \lambda e^{-3x} + \mu e^{x} + (x + 1)e^{x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

e) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 4e^{-x}$. *L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - 2r + 1 = 0$. Elle possède une racine double, qui est 1. L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc*

$$S_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Comme le second membre est de la forme $P(x)e^{sx}$, où $P(x) = 4 \in \mathbb{R}_0[x]$ et $s = -1$, et que s n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on peut chercher une solution particulière y_* de l'équation avec second membre sous la forme $y_*(x) = Q(x)e^{sx} = Q(x)e^{-x}$ avec $Q \in \mathbb{R}_0[x]$. Autrement dit $Q(x) = A$, où A est une constante réelle à déterminer. Ainsi $y_*'(x) = -Ae^{-x} = -y^*(x)$ et $y_*''(x) = Ae^{-x} = y_*(x)$, ce qui donne $y_*''(x) - 2y_*'(x) - y_*(x) = 4y_*(x) = 4Ae^{-x}$. La fonction y_* est donc solution de l'équation avec second membre si et seulement si $4Ae^{-x} = 4e^{-x}$, ce qui est équivalent à $4A = 4$, soit $A = 1$. On a donc obtenu que $y_*(x) = e^{-x}$ est solution particulière de l'équation avec second membre. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle considérée est

$$S = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{x} + e^{-x},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

f) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^x$. *L'équation caractéristique est la même qu'au e) donc l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est inchangé. Ici, le second membre* *de l'équation différentielle est de la forme* $P(x)e^{sx}$, *où* $P(x) = 3 \in \mathbb{R}_0[x]$ *et* $s = 1$. *Comme* s *est la racine double de l'équation caractéristique, on a le droit de chercher une solution particulière* y_* *de l'équation avec second membre sous la forme* $y_*(x) = Q(x)e^{sx} = Q(x)e^x$ *avec* $Q \in \mathbb{R}_2[x]$ *de valuation* 2, *c'est-à-dire* $Q(x) = Ax^2$, *la constante réelle* A *étant à calculer. Pour cela, il suffit de remarquer que* $y_*'(x) = A(x^2 + 2x)e^x$ *et* $y_*''(x) = A(x^2 + 4x + 2)e^x$, *et donc que* $y_*''(x) - 2y_*'(x) + y_*(x) = 2Ae^x$, *à partir de quoi on voit que* y_* *est solution de l'équation avec second membre si et seulement si* $2Ae^x = 3e^x$, *c'est-à-dire* $A = 3/2$. *On obtient ainsi que* $y_*(x) = (3/2)x^2e^x$ *est solution particulière de l'équation avec second membre et donc que l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle étudiée est*

$$S = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x + \frac{3}{2}x^2e^x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

g) $\underline{y''(x) + y(x) = 3\cos(2x)}$. *Ici l'équation caractéristique est* $r^2 + 1 = 0$. *Elle possède donc deux racines complexes conjuguées,* $\pm i = 0 \pm 1 \times i$, *de sorte que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est*

$$S_0 = \{x \mapsto (\lambda \sin(1 \times x) + \mu \cos(1 \times x))e^{0x} = \lambda \sin x + \mu \cos x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Ensuite, le second membre est de la forme $\alpha \sin(\omega x + \varphi) + \beta \cos(\omega x + \varphi)$ *avec* $\alpha = 0$, $\omega = 2$, $\varphi = 0$ *et* $\beta = 3$. *Comme* $i\omega = 2i$ *n'est pas solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière* y_* *de l'équation avec second membre sous la forme* $y_*(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B\cos(\omega x + \varphi) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$, *où* A *et* B *sont deux constantes réelles à déterminer. Un calcul simple donne* $y_*'(x) = 2(-B\sin(2x) + A\cos(2x))$ *et* $y_*''(x) = -4(A\sin(2x) + B\cos(2x)) = -4y_*(x)$, *ce qui fait que* $y_*''(x) + y_*(x) = -3y_*(x) = -3(A\sin(2x) + B\cos(2x))$. *Par conséquent* y_* *est solution de l'équation avec second membre si et seulement si* $-3(A\sin(2x) + B\cos(2x)) = 3\cos(2x)$, *c'est-à-dire* $-3A = 0$ *et* $-3B = 3$, *soit* $A = 0$ *et* $B = -1$. *Ainsi,* $y_*(x) = -\cos(2x)$ *est une solution particulière de l'équation avec second membre. On en déduit que l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle considérée est*

$$S = \{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x - \cos(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

h) $\underline{y''(x) + 4y(x) = 4\cos(2x)}$. *L'équation caractéristique est* $r^2 + 4 = 0$. *Elle possède deux racines complexes conjuguées,* $\pm 2i = 0 \pm 2 \times i$. *L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc*

$$S_0 = \{x \mapsto (\lambda \sin(2 \times x) + \mu \cos(2 \times x))e^{0x} = \lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Le second membre est toujours de la forme $\alpha \sin(\omega x + \varphi) + \beta \cos(\omega x + \varphi)$, *avec cette fois* $\alpha = 0$, $\omega = 2$, $\varphi = 0$ *et* $\beta = 4$. *Et comme* $i\omega = 2i$ *est solution solution de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière* y_* *de l'équation avec second membre sous la forme* $y_*(x) = x(A\sin(\omega x + \varphi) + B\cos(\omega x + \varphi)) = x(A\sin(2x) + B\cos(2x))$, A *et* B *étant deux constantes réelles à déterminer. Par un calcul simple on obtient* $y_*'(x) = 2x(-B\sin(2x) + A\cos(2x)) + A\sin(2x) + B\cos(2x)$ *et* $y_*''(x) = -4x(A\sin(2x) + B\cos(2x)) + 4(-B\sin(2x) + A\cos(2x)) = -4y_*(x) + 4(-B\sin(2x) + A\cos(2x))$, *donc* $y_*''(x) + 4y_*(x) = 4(-B\sin(2x) + A\cos(2x))$, *ce qui fait que* y_* *est solution particulière de l'équation avec second membre si et seulement si* $4(-B\sin(2x) + A\cos(2x)) =$

$4\cos(2x)$, *c'est-à-dire si* $A = 1$ *et* $B = 0$. *La solution particulière cherchée est donc* $y_*(x) = x\sin(2x)$ *et l'ensemble des solutions de l'équation différentielle considérée est :*

$$S = \{x \mapsto \lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x) + x\sin(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

i) $\underline{y''(x) + y(x) = 2\sin x - 3\cos(2x)}$. *L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est celui du g). Pour ce qui est du second membre* $f(x) = 2\sin x - 3\cos(2x)$, *il s'écrit* $f_1(x) - f_2(x)$ *avec* $f_1(x) = 2\sin x$ *et* $f_2(x) = 3\cos(2x)$. *Commençons par chercher une solution particulière* $y_{*,1}$ *de l'équation* $y''(x) + y(x) = f_1(x) = 2\sin x$. *Comme* $f_1(x)$ *est de la forme* $\alpha \sin(\omega x + \varphi) + \beta \cos(\omega x + \varphi)$ *avec* $\alpha = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = 0$ *et* $\beta = 0$, *et que* $\omega i = i$ *est solution de l'équation caractéristique* $r^2 + 1 = 0$, *on est amené à prendre* $y_{*,1}(x) = x(A\sin x + B\cos x)$, *où* $A, B \in \mathbb{R}$ *sont à calculer. Ceci entraîne* $y'_{*,1}(x) = A\sin x + B\cos x + x(-B\sin x + A\cos x)$ *et* $y''_{*,1}(x) = 2(-B\sin x + A\cos x) - x(A\sin x + B\cos x)$, *et donc* $y''_{*,1}(x) + y_{*,1}(x) = 2(-B\sin x + A\cos x)$. *Comme le second membre* $f_1(x) = 2\sin x$, *cela montre que* $-2B = 2$ *et* $2A = 0$, *soit* $y_{*,1}(x) = -x\cos x$. *Ensuite,* $y_{*,2}(x) = -\cos(2x)$ *est une solution particulière de l'équation différentielle* $y''(x) + y(x) = f_2(x) = 3\cos(2x)$, *en vertu de g), donc le principe de superposition implique que* $y_*(x) = y_{*,1}(x) - y_{*,2}(x) = -x\cos x + \cos(2x)$ *est solution particulière de l'équation différentielle* $y''(x) + y(x) = f_1(x) - f_2(x)$. *Par suite, l'ensemble des solutions de cette équation est :*

$$S = \{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x - x\cos x + \cos(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

j) $\underline{y''(x) + y(x) = 3\sin^2 x}$. *L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est celui du g), à savoir* $S_0 = \{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, *mais comme le second membre* $f(x) = 3\sin^2 x$ *ne relève d'aucun des trois types répertoriés, on va calculer une solution particulière* y_* *de l'équation différentielle avec second membre, à l'aide de la méthode de variation des constantes. Cela revient à chercher deux fonctions dérivables* $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $B = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *telles que* $y_*(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x$ *et*

$$A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Un calcul simple montre alors que $y'_*(x) = -B(x)\sin x + A(x)\cos x$ *et* $y''_*(x) = -B'(x)\sin x + A'(x)\cos x - A(x)\sin x - B(x)\cos x = -B'(x)\sin x + A'(x)\cos x - y_*(x)$. *Par suite,* $y''_*(x) + y_*(x) = -B'(x)\sin x + A'(x)\cos x$ *donc* y_* *est solution de l'équation différentielle avec second membre si et seulement si*

$$-B'(x)\sin x + A'(x)\cos x = 3\sin^2 x,\ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

En multipliant (1) *par* $\sin x$ *puis* (2) *par* $\cos x$, *et en faisant la somme des deux égalités ainsi obtenues, il vient*

$$\underbrace{A'(x)\sin^2 x + A'(x)\cos^2 x}_{A'(x)} = \underbrace{3\sin^2 x \cos x}_{(\sin^3 x)'},$$

ce qui fait que l'on peut choisir $A(x) = \sin^3 x$. *De même, si l'on multiplie* (1) *par* $\cos x$ *et* (2) *par* $\sin x$, *alors en faisant la différence des deux égalités ainsi obtenues, on trouve*

$$\underbrace{B'(x)\cos^2 x + B'(x)\sin^2 x}_{B'(x)} = -3\sin^3 x.$$

Ensuite, en utilisant le fait que $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$ et que $\int (1-\cos^2 x)\sin x dx = \int \sin x dx - \int \cos^2 x \sin x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$, on voit que $\int (3\sin^3 x)dx = -3\cos x + \cos^3 x$. Par suite, on peut choisir $B(x) = 3\cos x - \cos^3 x$, de sorte que $y_*(x) = A(x)\sin x + B(x)\cos x = \sin^4 x + 3\cos^2 x - \cos^4 x$. Au final, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle j) est donc :

$$S = \{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x + \sin^4 x + 3\cos^2 x - \cos^4 x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 4. On veut ensuite résoudre les systèmes différentiels suivants :

a) $\left\{\begin{array}{rcl} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) & = & 8x - 4 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1. \end{array}\right.$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 8x - 4$ associée à ce système est

$$S = \left\{x \mapsto y_{\lambda,\mu}(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} + 2x - 3,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\},$$

de sorte que l'on doit chercher les valeurs de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles on a simultanément $y_{\lambda,\mu}(0) = \mu - 3 = 0$ et $y'_{\lambda,\mu}(0) = \lambda - 2\mu + 2 = 1$. La première condition impose $\mu = 3$ et la seconde donne $\lambda = 1 - 2 + 2\mu = 5$. Donc le système différentiel a) admet une unique solution, qui est

$$x \mapsto y_{5,3}(x) = (5x + 3)e^{-2x} + 2x - 3.$$

b) $\left\{\begin{array}{rcl} y''(x) + 4y(x) & = & x^2 + 6 - 4\sin(2x) \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0. \end{array}\right.$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = x^2 + 6 - 4\sin(2x)$ associée à ce système est

$$S = \left\{x \mapsto y_{\lambda,\mu}(x) = \lambda \sin(2x) + \mu \cos(2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{11}{8} + x\cos(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ainsi les valeurs de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles on a simultanément $y_{\lambda,\mu}(0) = \mu + \frac{11}{8} = 1$ et $y'_{\lambda,\mu}(0) = 2\lambda + 1 = 0$. La première égalité donne $\mu = -\frac{3}{8}$ et la seconde $\lambda = -\frac{1}{2}$. Donc le système différentiel a) admet une unique solution, qui est

$$x \mapsto y_{-\frac{3}{8},-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{3}{8}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{11}{8} + x\cos(2x).$$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} y''(x) - 2y'(x) + y(x) & = & 5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0. \end{array}\right.$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 5\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ associée à ce système est

$$S = \left\{x \mapsto y_{\lambda,\mu}(x) = (\lambda x + \mu)e^x - \frac{5}{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

On cherche ensuite les valeurs de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *pour lesquelles on a* $y_{\lambda,\mu}(0) = \mu - \frac{5}{2}\sin\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ *et* $y'_{\lambda,\mu}(0) = \lambda + \mu - \frac{5}{2}\cos\left(0 - \frac{\pi}{4}\right) = 0$. *La première condition impose* $\mu = \frac{5}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{4}$ *alors que la seconde impose* $\lambda = -\mu + \frac{5}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. *Donc le système différentiel a) admet une unique solution, qui est*

$$x \mapsto y_{\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{4}}(x) = \frac{5\sqrt{2}}{4}(2x-1)e^x + 2x - 3.$$

d) $\left\{\begin{array}{rcl} y''(x) + 4y(x) & = & -\sin(2x) \\ y(\pi) & = & 1 \\ y'(\pi) & = & 1. \end{array}\right.$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 4y(x) = -\sin(2x)$ *associée à ce système est*

$$S = \left\{x \mapsto y_{\lambda,\mu}(x) = \lambda\sin(2x) + \mu\cos(2x) + \frac{x}{4}\cos(2x),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Les valeurs de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *pour lesquelles on a simultanément* $y_{\lambda,\mu}(\pi) = \mu + \frac{\pi}{4} = 1$ *et* $y'_{\lambda,\mu}(\pi) = 2\lambda + \frac{1}{4} = 1$. *La première égalité donne* $\mu = 1 - \frac{\pi}{4}$ *et la seconde* $\lambda = \frac{3}{8}$. *Donc le système différentiel a) admet une unique solution, qui est*

$$x \mapsto y_{\frac{3}{8},1-\frac{\pi}{4}}(x) = \frac{3}{8}\sin(2x) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\cos(2x) + \frac{x}{4}\cos(2x).$$