Université d'Aix-Marseille
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications

Transformation en z
Fonctions de plusieurs variables réelles

Table des matières

Chapitre 1

Transformation en z

Dans tout ce chapitre, les fonctions réelles de la variable réelle considérées sont supposées nulles sur $\mathbb{R}_-^*$, et T désigne un réel strictement positif.

1.1 Définition de la transformation en z

1.1.1 Séquence numérique associée à une fonction

Définition

Soit f une fonction. On appelle *séquence numérique associée à f* la suite de réels

$$f_e = (f(0), f(T), f(2T), \dots) = (f(nT))_{n \in \mathbb{N}},$$

obtenue en échantillonant la fonction f selon la période T.
T s'appelle la période d'échantillonnage de f et f_e est parfois appelée "fonction échantillonnée de f" (selon la période T).

Exemples

On prend $T = 1$.
1) Suite échelon unité
C'est la suite obtenue en échantillonant la fonction "échelon unité"

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{U}(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Suite de Dirac
C'est la suite obtenue en échantillonant la distribution de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0; \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

La suite de Dirac est donc définie par

$$\begin{cases} \delta(0) = 1; \\ \delta(n) = 0 \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

3) Suite de Dirac retardée
On appelle ainsi la suite obtenue en échantillonant la distribution de Dirac retardée de k unités, où k est un entier naturel fixé :

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = k; \\ 0 & \text{si } x \neq k. \end{cases}$$

La suite de Dirac retardée de k unités est donc définie par

$$\begin{cases} \delta_k(n) = 1 & \text{si } n = k; \\ \delta_k(n) = 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

Ceci permet de considérer la suite échelon unité, notée $\mathcal{U}_e$ selon la convention adoptée en début de chapitre, comme une somme de suites de Dirac retardées :

$$\boxed{\mathcal{U}_e = \sum_{k=0}^{+\infty} (\delta_k)_e.}$$

1.1.2 Transformée en z

On appelle *transformée en z* de la séquence numérique associée à la fonction f, $f_e = (f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction de la variable complexe z définie par

$$\boxed{F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) z^{-n}.}$$

F est l'image de f_e, et f_e est l'original de F dans la "transformation en z", notée $\mathcal{Z}$.
La transformée en z de la séquence numérique f_e est donc la somme d'une série entière de la variable $\frac{1}{z}$.
Si R désigne la rayon de convergence de cette série, $F(z)$ est donc définie pour tout nombre complexe z satisfaisant

$$\left|\frac{1}{z}\right| < R,$$

c'est-à-dire, sous l'hypothèse $R > 0$, si

$$|z| > \frac{1}{R}.$$

L'ensemble de définition de la fonction F est donc l'extérieur du disque de centre O et de rayon $\frac{1}{R}$.

1.1.3 Quelques exemples de transformées

On choisit à nouveau $T = 1$.

Transformée de la suite échelon unité

Comme $\mathcal{U}_e = (1)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

C'est la somme de la suite géométrique de raison $\frac{1}{z}$. Elle est définie si $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, c'est-à-dire si $|z| > 1$, et elle vaut dans ce cas :

$$F(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}.$$

Ce qui se résume en écrivant :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\mathcal{U}_e\}(z) = \frac{z}{z-1} \qquad \text{pour } |z| > 1.}$$

Plus généralement, on démontrera un peu plus loin pour tout complexe $a \in \mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(a^n\mathcal{U}(n))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = \frac{z}{z-a} \qquad \text{pour } |z| > |a|.}$$

Transformée de la suite de Dirac

Comme $\begin{cases} \delta(0) = 1; \\ \delta(n) = 0 \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$ la transformée en z de la suite de Dirac s'écrit :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(n) z^{-n} = 1.$$

On a donc obtenu

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\delta_e\}(z) = 1 \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}.}$$

Transformée de la suite de Dirac retardée

Comme $\begin{cases} \delta_k(n) = 1 \quad \text{si } n = k; \\ \delta_k(n) = 0 \quad \text{si } n \neq k, \end{cases}$ la transformée en z de la suite de Dirac retardée s'écrit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_k(n) z^{-n} = z^{-k}.$$

On retiendra donc :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(\delta_k)_e\}(z) = z^{-k} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}^*.}$$

1.2 Propriétés de $\mathcal{Z}$

1.2.1 Linéarité

La transformation en z est linéaire

Soient f_e et g_e deux séquences numériques respectivement associées aux fonctions f et g échantillonnées selon la même période d'échantillonnage T. On suppose que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$ converge pour $|z| > \frac{1}{R}$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} g(nT)z^{-n}$ converge pour $|z| > \frac{1}{R'}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$, on a alors :

$$\mathcal{Z}\{\lambda f_e + \mu g_e\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda f(nT) + \mu g(nT))\, z^{-n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} g(nT)z^{-n}.$$

Ainsi, quels que soient les nombres complexes λ et μ, on peut écrire

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\lambda f_e + \mu g_e\} = \lambda\mathcal{Z}\{f_e\} + \mu\mathcal{Z}\{g_e\}.}$$

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda f(nT) + \mu g(nT))\, z^{-n}$ converge donc (au moins) pour

$$|z| > \max\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}\right).$$

Un exemple : calcul de la tranformée en z des fonctions circulaires

Notons $\sin(\omega.)_e$ (sinus échantillonné, ou sinus "discret") la séquence $(\sin(\omega nT)\mathcal{U}(nT))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$\sin(\omega nT) = \frac{e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}}{2j},$$

donc, par linéarité de $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\{\sin(\omega.)_e\}(z) = \frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{e^{jwnT}z^{-n}}^{\left(\frac{e^{jwT}}{z}\right)^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \overbrace{e^{-jwnT}z^{-n}}^{\left(\frac{e^{-jwT}}{z}\right)^n}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{z}{z - e^{jwT}} - \frac{z}{z - e^{-jwT}}\right],$$

pour $\left|\frac{e^{\pm jwT}}{z}\right| = \frac{|e^{\pm jwT}|}{|z|} = \frac{1}{|z|} < 1$. Ce qui donne, toutes simplifications faites,

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\sin(\omega.)_e\}(z) = \frac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \qquad \text{pour } |z| > 1.}$$

En procédant de même, on montre que la transformée en z du cosinus discret $\cos(\omega.)_e$ (c'est-à-dire de la séquence numérique $(\cos(\omega nT)\mathcal{U}(nT))_{n\in\mathbb{N}}$) est :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\cos(\omega.)_e\}(z) = \frac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1} \qquad \text{pour } |z| > 1.}$$

1.2.2 Décalage

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Séquence retardée

Cas général. On considère la séquence f_{ret} obtenue en “retardant” la séquence f_e de mT :

$$f_{ret} = (f(nT - mT))_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

On a ainsi

$$\mathcal{Z}\{f_{ret}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\underbrace{nT - mT}_{(n-m)T})z^{-n}.$$

En effectuant le changement d'indice $p = n - m$, il vient alors :

$$\mathcal{Z}\{f_{ret}\}(z) = \sum_{p=-m}^{+\infty} f(pT)z^{-p-m} = z^{-m}\left[\underbrace{\sum_{p=-m}^{-1} f(pT)z^{-p}}_{\text{zéro car } f=0 \text{ sur } \mathbb{R}_-} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} f(pT)z^{-p}}_{\mathcal{Z}\{f_e\}(z)}\right],$$

donc

$$\boxed{\mathcal{Z}\{f_{ret}\}(z) = \frac{1}{z^m}\mathcal{Z}\{f_e\}(z),}$$

ou, de façon plus explicite :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(f(nT - mT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = \frac{1}{z^m}\mathcal{Z}\{(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z).}$$

Cas particulier où $T = 1$. On a dans ce cas :

$$\mathcal{Z}\{(f(n-1))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = \frac{1}{z}\mathcal{Z}\{(f(n))_{n\in\mathbb{N}}\}(z),$$

et on retiendra que :

$$\boxed{\text{La division par } z \text{ correspond à un retard unité.}}$$

Séquence avancée

Cas général. On considère de même la séquence f_{av} obtenue en “avançant” la séquence f_e de mT :

$$f_{av} = (f(nT + mT))_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

On a alors :

$$\mathcal{Z}\{f_{av}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\underbrace{nT + mT}_{(n+m)T})z^{-n}.$$

En posant ensuite $p = n + m$, on obtient

$$\mathcal{Z}\{f_{av}\}(z) = \sum_{p=m}^{+\infty} f(pT)z^{-(p-m)} = z^m \sum_{p=m}^{+\infty} f(pT)z^{-p}.$$

Or, $\displaystyle\sum_{p=m}^{+\infty} f(pT)z^{-p} = \mathcal{Z}\{f_e\}(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT)z^{-p}$, donc

$$\boxed{\mathcal{Z}\{f_{av}\}(z) = z^m \left[\mathcal{Z}\{f_e\}(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT)z^{-p}\right].}$$

Ce que l'on écrit également de façon un peu plus explicite :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(f(nT+mT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = z^m \left[\mathcal{Z}\{(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT)z^{-p}\right].}$$

Cas particulier où $T = 1$. On a dans ce cas :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(f(n+1))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = z\left[\mathcal{Z}\{(f(n))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) - f(0)\right]},$$

ce qui, sous l'hypothèse supplémentaire $f(0) = 0$, se résume comme suit :

$$\boxed{\text{La multiplication par } z \text{ correspond à une avance unité.}}$$

1.2.3 Transformée de $(a^{nT}f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$

Soit a un nombre complexe fixé. En notant F la transformée en z de la séquence $(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\mathcal{Z}\{(a^{nT}f(nT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{nT}f(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\left(\frac{z}{a^T}\right)^{-n},$$

donc :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(a^{nT}f(nT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = F\left(\frac{z}{a^T}\right).}$$

Application : calcul de la transformée de $(a^n\mathcal{U}(n))_{n\in\mathbb{N}}$

Dans ce cas particulier, on prend $T = 1$ et $f = \mathcal{U}$, de sorte que $F(z) = \dfrac{z}{z-1}$ pour tout $|z| > 1$. On obtient ainsi

$$\mathcal{Z}\{(a^n\mathcal{U}(n))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - 1} = \frac{z}{z-a}$$

si $\left|\dfrac{z}{a}\right| > 1$, c'est-à-dire si $|z| > |a|$, ce qui démontre bien le résultat annoncé plus haut.

1.2.4 Transformée en z de $(nTf(nT))_{n\in\mathbb{N}}$

Notons à nouveau F la transformée en z de la séquence $(f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$. La somme de la série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$ est dérivable à l'intérieur de son disque de convergence, et

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n)f(nT)z^{-n-1}.$$

Or, par définition,

$$\mathcal{Z}\{(nTf(nT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nTf(nT)z^{-n} = T\sum_{n=1}^{+\infty} nf(nT)z^{-n},$$

donc on obtient finalement

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(nTf(nT))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = -zTF'(z).}$$

1.2.5 Transformée en z du produit de convolution

On a défini en première année (voir le cours sur les transformées de Fourier ou de Laplace) le produit de convolution de deux fonctions intégrables f et g (nulles sur $\mathbb{R}_-^*$) comme la fonction

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

De façon analogue (si l'on se souvient qu'une intégrale est une "somme continue"), on appellera produit de convolution de deux séquences numériques f_e et g_e, la séquence numérique notée $f_e * g_e$ qui est définie par :

$$(f_e * g_e)(n) = \sum_{k=0}^{n} f(kT)g(nT-kT) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effectuant le changement d'indice $k' = n-k$ dans cette expression, on remarque que

$$(f_e * g_e)(n) = \sum_{k'=n}^{0} f(nT-k'T)g(k'T) = \sum_{k'=0}^{n} g(k'T)f(nT-k'T),$$

ce qui établit :

$$(f_e * g_e)(n) = (g_e * f_e)(n).$$

On retrouve ainsi dans le cas (discret) des séquences numériques, l'égalité $f * g = g * f$ démontrée en première année.
Avec une technique analogue à ce qui vient d'être fait (changement d'indices), on démontre par ailleurs

$$\boxed{\mathcal{Z}\{f_e * g_e\} = \mathcal{Z}\{f_e\} \times \mathcal{Z}\{g_e\}}$$

ce qui rappelle les résultats obtenus lors de l'étude des transformées de Fourier ou de Laplace, à savoir $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \times \mathcal{F}\{g\}$ et $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \times \mathcal{L}\{g\}$.

1.3 Transformation en z inverse

1.3.1 Définition

On appelle "transformation en z inverse", l'application notée $\mathcal{Z}^{-1}$, qui associe à la "série entière" en $\frac{1}{z}$ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$, la séquence numérique $f_e = (f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$, appelée "original de F". On écrit alors :

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F\} = f_e.$$

Il n'existe pas de formule simple donnant l'expression de $\mathcal{Z}^{-1}$. Pour calculer l'original d'une fonction F, on utilise les tables donnant la transformée en z des fonctions usuelles ainsi que les propriétés de $\mathcal{Z}$.

1.3.2 Exemples

Original de $\dfrac{1}{z^2-3z+2}$

La décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle donne

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

ce qui entraîne évidemment

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}\right).$$

Or, on a démontré que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\}(n) = a^n\mathcal{U}(n) \text{ si } |z| > |a|,$$

ce qui permet d'écrire que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}(n) = \mathcal{U}(n) \text{ pour } |z| > 1 \text{ et } \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\}(n) = 2^n\mathcal{U}(n) \text{ pour } |z| > 2.$$

Le facteur $\frac{1}{z}$ traduisant un retard d'une unité, on a donc finalement :

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2-3z+2}\right\}(n) = (2^{n-1}-1)\mathcal{U}(n-1) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Original de $\dfrac{z+1}{z-1}$

Il est facile de voir que

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{z-1+2}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1} = 1 + \frac{2}{z}\frac{z}{z-1}.$$

Ensuite, comme $\mathcal{Z}^{-1}\{1\}(n) = \delta(n)$ et $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z}{z-1}\right\}(n) = \mathcal{U}(n)$, on obtient

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z+1}{z-1}\right\}(n) = \delta(n) + 2\mathcal{U}(n-1),$$

car on sait que la multiplication par $\frac{1}{z}$ induit un retard d'une unité.

1.4 Une application de la transformation en z : les équations aux différences

1.4.1 Un exemple d'équation aux différences

Soient α, β, y_0 trois réels fixés, et f une fonction (supposée nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, comme c'est l'usage dans ce chapitre). On cherche à connaître la fonction inconnue y, solution du problème différentiel suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} (E) & \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t); \\ (CI) & y(0) = y_0. \end{cases}$$

On a vu en première année que ce type de problème différentiel ((E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants) possède une unique solution. Mais, le calcul explicite de cette solution requiert la connaissance d'une "solution particulière", qui n'est pas toujours évidente à trouver.
De plus, dans la pratique, la fonction f n'est pas toujours entièrement connue. En effet, il s'agit souvent d'une grandeur physique mesurée à intervalles de temps $T > 0$ réguliers. A la place de la fonction f, on dispose donc seulement de la séquence numérique $f_e = (f(nT))_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ces conditions, il est illusoire de prétendre calculer l'inconnue y à tous les instants $t \in \mathbb{R}_+$. On va se contenter de calculer la séquence numérique $y_e = (y(nT))_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour cela, on identifie $y'(nT) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{y(nT+\Delta t) - y(nT)}{nT + \Delta t - nT} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{y(nT+\Delta t) - y(nT)}{\Delta t}$ avec la différence $\dfrac{y(nT+T) - y(nT)}{T}$, ce qui est acceptable dès lors que T est assez petit (c'est-à-dire si l'on a échantillonné la fonction f assez "finement"). L'équation différentielle (E) devient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha \frac{y(nT+T) - y(nT)}{T} + \beta y(nT) = f(nT),$$

soit

$$\underbrace{\frac{\alpha}{T}}_{a} y(nT+T) + \underbrace{\left(\beta - \frac{\alpha}{T}\right)}_{b} y(nT) = f(nT).$$

On est ainsi amené à résoudre le "problème aux différences"

$$(P_n) \qquad \begin{cases} (E_n) & a y(nT+T) + b y(nT) = f(nT); \\ (CI) & y(0) = y_0. \end{cases}$$

L'équation "discrétisée" (E_n) s'appelle "équation aux différences".
Pour résoudre (P_n) pour chaque entier naturel n, appliquons la transformation en z à (E_n). Ainsi, en posant préalablement $Y = \mathcal{Z}\{y_e\}$ et $F = \mathcal{Z}\{f_e\}$, on obtient :

$$az(Y(z) - y_0) + bY(z) = F(z),$$

soit

$$Y(z) = \frac{F(z) + azy_0}{az + b}.$$

Pour obtenir y_e, il faut donc calculer $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{F(z) + azy_0}{az + b}\right\}$ à l'aide des méthodes présentées au paragraphe précédent, en tenant compte de l'égalité $\mathcal{Z}^{-1}\{F\} = f_e$.

1.4.2 Exemple

Pour illustrer le sous-paragraphe précédent d'un exemple "concret", supposons que $T = 1$ et résolvons le "problème aux différences" suivant :

$$\begin{cases} y(n+1) + y(n) = n = n\mathcal{U}(n); \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Par application de $\mathcal{Z}$, on obtient, en notant à nouveau Y à la place de $\mathcal{Z}\{y_e\}$:

$$z(Y(z) - \underbrace{y(0)}_{0}) + Y(z) = \mathcal{Z}\{(n\mathcal{U}(n))_{n\in\mathbb{N}}\}(z).$$

Or, on sait que

$$\mathcal{Z}\{(n\mathcal{U}(n))_{n\in\mathbb{N}}\}(z) = -z\left(\underbrace{\mathcal{Z}\{(\mathcal{U}(n))_{n\in\mathbb{N}}\}(z)}_{\frac{z}{z-1}}\right)' = \frac{z}{(z-1)^2},$$

donc

$$Y(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^2}.$$

La décomposition en élements simples de Y s'écrit :

$$Y(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z-1} + 2\frac{z}{(z-1)^2}\right).$$

Or, $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z+1}\right\}(n) = (-2)^n\mathcal{U}(n)$, $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}(n) = \mathcal{U}(n)$ et on vient de voir que $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-1)^2}\right\}(n) = n\mathcal{U}(n)$. On obtient ainsi finalement :

$$y(n) = \frac{2n - 1 + (-2)^n}{4}\mathcal{U}(n).$$

1.5 Transformation de Fourier discrète

1.5.1 Définition

En théorie du signal, vous utiliserez la notion de "transformation de Fourier discrète". Il s'agit simplement d'un cas particulier de la transformation en z. En effet, $x_e = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignant un signal discret (c'est-à-dire une séquence numérique), on appelle transformée de Fourier discrète de x_e (simplement notée TFD de x_e dans la suite), la fonction de la variable réelle λ :

$$X(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathrm{e}^{-j2\pi\lambda n}.$$

On a évidemment

$$X(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{j2\pi\lambda}}\right)^n,$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{\forall\lambda \in \mathbb{R},\ X(\lambda) = \mathcal{Z}\{x_e\}\left(\mathrm{e}^{j2\pi\lambda}\right).}$$

La TFD d'un signal (discret) est donc bien un cas particulier de transformée en z de ce signal.

1.5.2 Périodicité

Comme $e^{j2\pi(\lambda+1)} = e^{j2\pi\lambda} \times e^{j2\pi}$ pour tout réel λ, et que $e^{j2\pi} = 1$, il est clair que

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R},\ X(\lambda+1) = X(\lambda).}$$

La TFD de x_e est donc une fonction 1-périodique.

1.5.3 Lien avec les séries de Fourier

La fonction $\lambda \mapsto X(\lambda)$ est de période 1 et elle s'écrit comme un développement en série de Fourier (voir le cours de premiére année). Les coefficients x_n, $n \in \mathbb{N}$, sont donc les coefficients de Fourier complexes de la fonction X, ce qui impose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\lambda) e^{j2\pi\lambda n} d\lambda.$$

La donnée de la séquence numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\lambda) e^{j2\pi\lambda n} d\lambda \right)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de la fonction X, s'appelle "transformation de Fourier discrète inverse".

1.6 Formulaire

On peut résumer les résultats importants de ce chapitre à l'aide du formulaire de la page suivante.

Transformée en z

$\mathbf{f(n)}$	$\xrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\mathbf{F(z)}$
$\mathcal{U}(n)$		$\dfrac{z}{z-1}$ pour $\lvert z\rvert > 1$
$a^n\mathcal{U}(n),\ a \in \mathbb{C}$		$\dfrac{z}{z-a}$ pour $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$\delta(n)$		1 pour $z \in \mathbb{C}$
$\delta_k(n),\ k \in \mathbb{N}^*$		z^{-k} pour $z \in \mathbb{C}^*$
$\cos(n\omega T)\mathcal{U}(n),\ \omega \in \mathbb{R}$		$\dfrac{z^2 - z\cos(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$ pour $\lvert z\rvert > 1$
$\sin(n\omega T)\mathcal{U}(n),\ \omega \in \mathbb{R}$		$\dfrac{z\sin(\omega T)}{z^2 - 2z\cos(\omega T) + 1}$ pour $\lvert z\rvert > 1$
$\lambda f(n) + \mu g(n)$		$\lambda F(z) + \mu G(z)$
$f(nT - mT),\ m \in \mathbb{N}^*$		$\dfrac{1}{z^m}F(z)$
$f(nT + mT)\ m \in \mathbb{N}^*$		$z^m\left[F(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT)z^{-p}\right]$
$a^{nT}f(nT),\ a \in \mathbb{C}$		$F\left(\dfrac{z}{a^T}\right)$
$nTf(nT)$		$-zTF'(z)$
$f(n) * g(n)$		$F(z) \times G(z)$

Chapitre 2

Fonctions de plusieurs variables

Dans toute la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

2.1 Introduction

2.1.1 L'ensemble $\mathbb{R}^n$

Définition

$\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$, avec $x_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. C'est-à-dire :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2 \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Egalité dans $\mathbb{R}^n$

Deux points $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ et $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sont égaux si et seulement si

$$x_i = x'_i,\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

On note alors simplement $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

2.1.2 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

Définition

On appelle fonction de n-variables toute application d'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2 \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2 \ldots, x_n). \end{array}$$

$\mathcal{D}$ s'appelle l'ensemble de définition de f.

Exemples.

a) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$. Le domaine de f est $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x + y \leq 1\}$. Il est donc constitué par tous les points de $\mathbb{R}^2$ situés entre les droites d'équations cartésiennes $y = -x \pm 1$.

b) $g(x, y, z) = \ln(x^2 - 2x + y^2 + z^2)$. On remarque que $g(x, y, z) = \ln\left((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$, et donc que le domaine de g est $\mathcal{D}_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 > 1\}$. Il s'agit donc de tous les points de $\mathbb{R}^3$ appartenant à l'extérieur de la sphère de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon 1.

Représentation des fonctions de 2 variables

Considérons la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y). \end{array}$$

L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)),\ (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

est une surface de $\mathbb{R}^3$, dont l'équation cartésienne est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathcal{D} \\ z = f(x, y). \end{array} \right.$$

Soit ensuite C un nombre réel. On note $\mathcal{P}_C$ le plan horizontal d'équation cartésienne $z = C$:

$$\mathcal{P}_C = \{(x, y, C),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ainsi, suivant les valeurs prises par C, l'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{P}_C$, à savoir

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C = \{(x, y, C),\ (x, y) \in \mathcal{D} \text{ vérifie } f(x, y) = C\},$$

est soit vide, soit réduite à un point, soit une courbe incluse dans le plan $\mathcal{P}_C$.
Lorsque C parcourt $\mathbb{R}$, l'ensemble formé par toutes ces courbes est appelé "ensemble des courbes de niveau" de S.

Exemple. Soient a et b deux réels fixés et $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout réel C, on a, en reprenant les notations précédentes,

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C = \left\{\{(x, y, C),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ vérifie } (x-a)^2 + (y-b)^2 = C\right\}.$$

Par suite, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C$ est
- l'ensemble vide, si $C < 0$;
- le cercle de centre (a, b, C) et de rayon $\sqrt{C}$ contenu dans le plan $z = C$ si $C \geq 0$.

On peut remarquer que ce cercle dégénère en le point $(a, b, 0)$ lorsque $C = 0$.

2.1.3 Continuité

Notion de distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition. On appelle distance dans $\mathbb{R}^n$, toute application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$, qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (symétrie) ;
2. $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (séparation) ;
3. $\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (inégalité triangulaire).

Exemples. Les distances les plus communément utilisées dans $\mathbb{R}^n$ sont définies, pour chaque $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ et chaque $\mathbf{y} = (y_1, y_2 \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, par :

– $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

– $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$;

– $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \{|x_i - y_i|,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$.

On pourra vérifier à titre d'exercice, que d_1, d_2 et d_∞ sont bien des distances dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque. Dans le cas particulier où $n = 1$, ces trois distances sont égales.

Boule ouverte associée à une distance d. Soient d une distance dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x^0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un point de $\mathbb{R}^n$ et $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ de centre $\mathbf{x^0}$ et de rayon r_0, associée à la distance d, l'ensemble

$$B_d(\mathbf{x^0}, r_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ d(\mathbf{x}, \mathbf{x^0}) < r_0\}.$$

On note $B_1(\mathbf{x^0}, r_0)$ (resp. $B_2(\mathbf{x^0}, r_0)$, $B_\infty(\mathbf{x^0}, r_0)$) la boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ de centre $\mathbf{x^0}$ et de rayon r_0, associée à la distance d_1 (resp. d_2, d_∞).

Exemples. Plaçons-nous dans le cas où $n = 2$. Quels que soient $\mathbf{x^0} = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ et $r_0 > 0$, $B_2(\mathbf{x^0}, r_0)$ est l'intérieur du disque de centre $\mathbf{x^0}$ et de rayon r_0, alors que $B_\infty(\mathbf{x^0}, r_0)$ est l'intérieur du carré de centre $\mathbf{x^0}$ et de coté $2r_0$.

Continuité en un point

Soient $f : (x_1, x_2 \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ une fonction définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbf{x^0} = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un point de $\mathcal{D}$. On dit que f est continue en $\mathbf{x^0}$ si

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x^0} \\ \mathbf{x} \in \mathcal{D}}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x^0}).$$

Autrement dit, f est continue en $\mathbf{x^0}$ si, à tout réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut), on peut associer un réel $r_\varepsilon > 0$ satisfaisant la condition suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D},\ \mathbf{x} \in B(\mathbf{x^0}, r_\varepsilon) \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x^0})| \leq \varepsilon.$$

Lorsque la fonction f est continue en tout point $\mathbf{x}$ de $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, on dit que f est continue sur $\mathcal{D}'$, et l'on note alors $f \in C^0(\mathcal{D}')$.

Remarque. Dans la définition précédente, il suffit que la condition $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x^0})| \leq \varepsilon$ soit satisfaite pour tous les éléments d'une boule ouverte $B(\mathbf{x^0}, r_\varepsilon)$ associée à n'importe quelle distance d dans $\mathbb{R}^n$. En effet, on peut démontrer (ce n'est pas au programme de GTR) que si cette condition est vérifiée pour une distance particulière d, alors elle l'est automatiquement pour toutes les distances.

Exemple. La fonction $f(x,y) = 2x+y$, qui est définie sur $\mathbb{R}^2$, est continue en tout point $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. En effet, le point $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ étant fixé, on a, pour tout $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = 2|x - x_0| + |y - y_0| \leq 2d_1(M, M_0).$$

Ainsi, quel que soit le réel ε arbitrairement fixé dans $\mathbb{R}_+^*$, on aura bien $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$ pour tout point $M \in B_1\left(M_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Cela montre que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Résultats. Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, on vérifie facilement que la définition précédente entraîne :

1. si f est continue en $\mathbf{x}$ alors λf est continue en $\mathbf{x}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. si f et g sont continues en $\mathbf{x}$ alors $f + g$ et fg sont continues en $\mathbf{x}$.
3. si f est continue en $\mathbf{x}$ et que $f(\mathbf{x}) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en $\mathbf{x}$.

Remarque importante. Autre conséquence de cette définition de la continuité : si la fonction de deux variables, f, est continue au point (x_0, y_0), alors :

- $x \overset{f_{y_0}}{\mapsto} f(x, y_0)$ est une fonction (d'une seule variable) continue au point x_0 ;
- $y \overset{f_{x_0}}{\mapsto} f(x_0, y)$ est une fonction (d'une seule variable) continue au point y_0.

Par contre, la réciproque est fausse. En d'autres termes, il ne suffit pas que f_{y_0} soit continue en x_0 et que f_{x_0} soit continue en y_0 pour que la fonction de deux variables f soit continue en (x_0, y_0).
Pour s'en convaincre, considérons la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que $y \mapsto f(0,y)$ est nulle sur $\mathbb{R}$. C'est donc une fonction continue en $y = 0$. De même $x \mapsto f(x,0)$ est nulle sur $\mathbb{R}$ donc cette fonction est continue en $y = 0$.
Et pourtant, la fonction $(x,y) \mapsto f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$, l'expression de $f(x,y)$ lorsque $x = y$ devient $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Ainsi, si l'on choisit $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple, l'égalité $f(x,x) = \frac{1}{2}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, prouve qu'il n'existe aucune boule centrée en $(0,0)$ à l'intérieur de laquelle f a toutes ses valeurs inférieures à ε. En effet, f prend la valeur $\frac{1}{2}$ sur la droite d'équation cartésienne $y = x$, qui rencontre l'intérieur de n'importe quel disque centré en $(0,0)$. Ceci montre bien que la fonction f n'est pas continue en $(0,0)$.

2.1.4 Dérivabilité

Dérivées partielles

Cas de deux variables. Soient $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{D}$. On appelle :

- dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0), la dérivée de la fonction d'une variable $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ au point x_0, si elle existe. Dans ce cas, on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\partial_x f(x_0, y_0)$.
- dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0), la dérivée de la fonction d'une variable $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ au point y_0, si elle existe. Dans ce cas, on la note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\partial_y f(x_0, y_0)$.

Autrement dit, si l'on suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (f_{y_0})'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_{y_0}(x_0 + h) - f_{y_0}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (f_{x_0})'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_0}(y_0 + h) - f_{x_0}(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Lorsque f possède une dérivée partielle par rapport à x <u>en tout point (x, y) de $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$</u>, on peut alors définir la fonction "dérivée partielle de f par rapport à x", notée simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$, et définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array} \right.$$

De même, si f possède une dérivée partielle par rapport à y en tout point (x, y) de $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}$, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial y} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}'' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array} \right.$$

est appelée "dérivée partielle de f par rapport à y".

Généralisation au cas de n variables. Soient f une fonction une fonction définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$,

$$(x_1, x_2 \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2 \ldots, x_n),$$

et $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un point de $\mathcal{D}$.
Fixons maintenant i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x_i au point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ si la fonction (d'une variable)

$$t \mapsto f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

est dérivable au point $t = x_i^0$.
Dans ce cas, la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ou bien $\partial_{x_i} f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, et on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)}{h}.$$

En d'autre termes :

On dérive (dans $\mathbb{R}$) par rapport à x_i, en maintenant toutes les autres variables constantes.

Si f possède une dérivée partielle par rapport à x_i en tout point $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ d'un sous-ensemble $\mathcal{D}_i$ de $\mathcal{D}$, on définit la fonction "dérivée partielle de f par rapport à x_i" par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2 \ldots, x_n) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2 \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

Lorsque toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sont continues sur un sous-ensemble $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$, f est dite de classe C^1 sur $\mathcal{D}'$. Et l'on note alors $f \in C^1(\mathcal{D}')$.

Remarque. $f \in C^1(\mathcal{D}) \Longrightarrow f \in C^0(\mathcal{D})$.

Exemples.

a) $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + xy$. Quel que soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction $f_{x_0}(y) = 2x_0^3 + y^2 + x_0 y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynômiale (en y). Et on a évidemment :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (f_{x_0})'(y) = 2y + x_0.$$

De la même façon, la fonction $f_{y_0}(x) = 2x^3 + y_0^2 + y_0 x$ est polynômiale (en x) donc dérivable sur $\mathbb{R}$ entier, et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = 6x^2 + y_0.$$

b) $g(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^4)$. Comme la fonction $\varphi : (x,y) \mapsto 1 + x^2 + y^4$ est un polynôme (en x et y), elle admet (voir l'exemple **a)**) des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, l'image de φ, à savoir l'ensemble $\varphi(\mathbb{R}^2) = \{t \in \mathbb{R},\ t = \varphi(x,y) \text{ pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, est inclus dans $[1, +\infty[$, donc dans $\mathbb{R}_+^*$, qui est le domaine de définition de la fonction $t \mapsto \ln(t)$. Comme la fonction logarithme est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $g = \ln \circ \varphi$ admet forcément des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$. Un calcul simple montre alors que pour chaque point (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^4}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3}{1 + x^2 + y^4}.$$

2.1.5 Dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Lorsque les fonctions

$$(x,y) \mapsto \partial_x f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad (x,y) \mapsto \partial_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

possèdent des dérivées partielles, on pose :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial y}(x,y).$$

Et quand toutes ces nouvelles dérivées partielles (dites du second ordre) sont continues sur $\mathcal{D}$, la fonction f est dite de classe C^2 sur $\mathcal{D}$, ce que l'on note alors $f \in C^2(\mathcal{D})$.
Dans ce cas, on dispose alors du théorème fondamental (admis) suivant :

Théorème de Schwarz. – *Si les fonctions* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *sont continues en* (x_0, y_0)*, alors on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Plus généralement, dans le cas d'une fonction de n variables, le théorème de Schwarz impose

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

à condition que les fonctions $(x_1, x_2 \ldots, x_n) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ et $(x_1, x_2 \ldots, x_n) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ soient continues au point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Exemple. Reprenons l' exemple **a)** de la section précédente. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a vu que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + y$. Cette fonction est polynômiale (en x, y) donc elle possède des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1.$$

La fonction $(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ est constante sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Par ailleurs, comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1.$$

On retrouve donc, sur cet exemple, que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, ce qui était prévu par le théorème de Schwarz.

Application : dérivation composée

Soit f une fonction de deux variables de classe C^1 sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On considère ensuite deux fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I, \ (x(t), y(t)) \in \mathcal{D},$$

ce qui permet de définir la fonction composée

$$F(t) = f[x(t), y(t)], \ \forall t \in I.$$

Si l'on dispose d'assez de temps, on démontrera en T.D. le résultat suivant :

Théorème 1. – *La fonction* F *est dérivable sur* I *et, pour tout* $t \in I$*, sa dérivée s'écrit :*

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}[x(t), y(t)] \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[x(t), y(t)] \times y'(t).$$

Ce résultat nous servira notamment à démontrer les théorèmes 3 et 4 qui vont suivre.

2.1.6 Formule des accroissements finis

Rappel

Rappelons l'énoncé de la "formule des accroissements finis" pour les fonctions réelles d'une variable réelle.

Théorème 2. – *Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue sur l'intervalle fermé $[a, a+h]$ (où $h > 0$) et dérivable sur $]a, a+h[$.*
Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h).$$

Nous allons maintenant généraliser ce résultat au cas d'une fonction de deux variables.

Cas d'une fonction de deux variables

Théorème 3. – *Soit f une fonction de deux variables réelles, continue sur $[a, a+h] \times [b, b+k]$ (où $h > 0$ et $k > 0$) et de classe C^1 sur $]a, a+h[\times]b, b+k[$. Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+\theta k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+\theta h, b+\theta k).$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0,1]$, posons $F(t) = f(a+th, b+tk)$. La fonction F est continue sur $[0,1]$ et, le théorème 1 garantit (il suffit de poser $x(t) = a+th$ et $y(t) = b+tk$) qu'elle est dérivable sur $]0,1[$ avec, pour chaque $t \in]0,1[$:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)k.$$

Comme F est une fonction d'une seule variable, le théorème 2 peut ensuite s'appliquer : il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\underbrace{F(1)}_{f(a+h,b+k)} - \underbrace{F(0)}_{f(a,b)} = (1-0)F'(\theta),$$

ce qui achève la démonstration. ■

Conséquences

On peut déduire du théorème précédent deux conséquences simples (mais importantes) suivantes :

1. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[$, alors la fonction f ne dépend que de y.
   Plus précisément, il existe une fonction $\varphi :]b, b+k[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
   $$\forall (x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[,\ f(x,y) = \varphi(y).$$
2. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[$, alors la fonction f est constante sur le pavé $]a, a+h[\times]b, b+k[$.
   Autrement dit :
   $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\right) \Longrightarrow (\exists C \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[,\ f(x,y) = C).$$

2.1.7 Formule de Taylor à l'ordre 2

Enoncé du résultat

Le théorème 2 permet de justifier le résultat suivant, appelé “formule de Taylor à l'ordre 2” pour les fonctions d'une seule variable réelle :

si $f \in C^0([a, a+h[) \cap C^2(]a, a+h[)$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$), alors, pour chaque $t \in]0, h[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \frac{1}{2} f''(a+\theta h)t^2.$$

Comme nous allons le voir maintenant, on peut généraliser cette formule au cas des fonctions de deux variables réelles.

THÉORÈME 4. – *Soit f une fonction de deux variables réelles, continue sur $[a, a+h] \times [b, b+k]$ (avec $h > 0$ et $k > 0$) et de classe C^2 sur $]a, a+h[\times]b, b+k[$.*
Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) = & \quad f(a,b) + h\tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ + & \quad \tfrac{1}{2}\left[h^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)\right]. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $F(t) = f(a+th, b+tk)$ définie sur $[0, 1]$, vérifie les hypothèses de la formule de Taylor à l'ordre 2 (énoncée précédemment pour les fonctions d'une seule variable réelle). Il existe donc $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(\theta).$$

Or, le théorème 1 nous dit que

$$\forall t \in]0, 1[, \; F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk).$$

Comme $f \in C^2(]a, a+h[\times]b, b+k[)$, ce même théorème 1 s'applique à nouveau à la dérivée F'. On obtient ainsi, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th, b+tk) + kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk).$$

Enfin, comme f est de classe C^2 sur $]a, a+h[\times]b, b+k[$, le théorème de Schwarz nous donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th, b+tk) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Application à la recherche d'extrema locaux

Dans toute la suite, f désigne une fonction de deux variables, définie sur $]x_0-H, x_0+H[\times]y_0-K, y_0+K[$ où $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $H>0$, $K>0$.

Définition. On dit que (x_0, y_0) est un maximum local (resp. minimum local) de f, s'il existe $\Delta x \in]0, H]$ et $\Delta y \in]0, K]$ tels que

$$\forall (x,y) \in]x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x[\times]y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y[, \; f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x,y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Les minima ou les maxima locaux de la fonction f sont appelés "extrema locaux" de f.

Condition nécéssaire d'existence d'un extrémum local. Si (x_0, y_0) est un extrémum local de f, alors, on a forcément :
– x_0 est un extrémum local de la fonction (d'une variable) $x \mapsto f(x, y_0)$;
– y_0 est un extrémum local de la fonction (d'une variable encore) $y \mapsto f(x_0, y)$.
Cela justifie le résultat suivant :

Théorème 5. – *Si f possède des dérivées partielles au point (x_0, y_0), alors :*

$$(x_0, y_0) \text{ est un extrémum local de } f \implies \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\right).$$

Tout point $(x,y) \in]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$ en lequel f possède des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ qui sont nulles, s'appelle un point stationnaire de f.
Ainsi, le théorème 5 dit simplement que les extréma locaux de f (supposée posséder des dérivées partielles en tout point de $]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$) sont à chercher parmi les points stationnaires de f.

Attention : il n'y a pas de réciproque à ce résultat. Autrement dit, un point stationnaire de f n'est pas forcément un extrémum local de f.
Pour le voir, considérons la fonction $f(x,y) = xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. On a bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

et pourtant $(0,0)$ n'est pas un extrémum local de f puisque $f(0,0) = 0$ alors que $f(x,y) < 0$ lorsque $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*) \cup (\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*)$ et $f(x,y) > 0$ lorsque $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cup (\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*)$.

Etude locale au voisinage d'un point stationnaire. Supposons que $f \in C^2(]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[)$ et que (x_0, y_0) est un point stationnaire de f.
Comment savoir si (x_0, y_0) est un extrémum local de f ?
Pour tout $(x,y) \in]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$, la fonction f est de classe C^2 sur $[x_0, x] \times [y_0, y]$, donc le théorème 4 s'applique : il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & f(x_0, y_0) + h \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{0} + k \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{0} \\ + \quad & \tfrac{1}{2}\left[h^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hk \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)\right], \end{aligned}$$

où l'on a posé $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$.
Autrement dit, on a

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)}_{P(h,k)}\right) + (h^2+k^2)\varepsilon(h,k),$$

avec bien sûr

$$\begin{aligned} 2\varepsilon(h,k) = \quad & \frac{h^2}{h^2+k^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\right] \\ + \quad & \frac{2hk}{h^2+k^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right] \\ + \quad & \frac{k^2}{h^2+k^2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right]. \end{aligned}$$

Comme f est de classe C^2 sur $]x_0-H, x_0+H[\times]y_0-K, y_0+K[$, les fonctions $(x,y)\mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $(x,y)\mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ et $(x,y)\mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ sont continues au point (x_0,y_0), donc :

$$\lim_{h,k\to 0}\varepsilon(h,k) = 0.$$

Ceci montre que le signe de $(x,y)\mapsto f(x,y)-f(x_0,y_0)$, lorsque (x,y) est proche de (x_0,y_0) (c'est-à-dire lorsque h et k sont proches de 0) est déterminé par celui de $P(h,k)$.

Etude du signe de $P(h,k)$. Pour tout $k\neq 0$, posons $u=\frac{h}{k}$, de sorte que

$$P(h,k) = k^2\underbrace{\left[u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right]}_{T(u)}.$$

Le signe de $P(h,k)$ est donc celui de $T(u)$. Or, le discriminant réduit de ce trinôme s'écrit

$$\Delta' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),$$

et il est bien connu que :
- si $\Delta' < 0$: $u\mapsto T(u)$ garde un signe constant ;
  - si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$: T est positif, donc (x_0,y_0) est un minimum local de f ;
  - si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$: T est négatif, donc (x_0,y_0) est un maximum local de f ;
- si $\Delta' > 0$: $u\mapsto T(u)$ change de signe, donc (x_0,y_0) n'est pas un extrémum local de f ;
- si $\Delta' = 0$: on ne peut pas prévoir si T change de signe ou s'il garde un signe constant, ce qui empêche de conclure directement. Pour cela, il faudrait "pousser" le développement de Taylor de la fonction f en (x_0,y_0) jusqu'à l'ordre 3 au moins.