Université d'Aix-Marseille
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux & Télécommunications

Fonctions de la variable réelle

1. **Limites et continuité**
2. **Dérivation**
3. **Fonctions logarithme, exponentielle et hyperboliques**
4. **Intégration**
5. **Développements limités**
6. **Equations différentielles**

Table des matières

Chapitre 1

Limites et continuité

1.1 Rappels

1.1.1 Intervalles

Soient a et b deux réels.
On appelle intervalle ouvert $]a, b[$ et intervalle fermé $[a, b]$ les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \quad \text{et} \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}.$$

De même, on a

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\} \quad \text{et} \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}.$$

Par extension, on note :

$$\begin{cases} [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}; &]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\} \\ ]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}; &]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}. \end{cases}$$

1.1.2 Fonction numérique

On rappelle qu'une application d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F associe à tout élément de E un unique élément de F.
On appelle fonction numérique (de la variable réelle) toute application dont les ensembles d'arrivée et de départ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
On notera

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

L'ensemble D des réels qui possèdent une image $f(x)$ par f est le domaine de définition de f.

Remarque. Dans le cas où la fonction n'est définie que par l'expression de $f(x)$, on sous-entend que le domaine de définition de f est le sous-ensemble maximum de $\mathbb{R}$ sur lequel $f(x)$ existe.
Par exemple, si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, il est sous-entendu que $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[= \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

1.2 Limite finie

Soit f une fonction numérique de domaine D.

1.2.1 Limite en un point

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Le point x_0 peut éventuellement ne pas appartenir à D, mais on suppose que tout intervalle ouvert $]a, b[$ contenant x_0 rencontre D. On dit alors que x_0 n'est pas isolé dans D.

Définition

Par définition, le réel l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend généralement de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } |x - x_0| < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[}.$$

On note alors $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, on admet que cette limite est unique.

Limite à droite, limite à gauche

On dit que l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend encore généralement de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } 0 < x - x_0 < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0, x_0 + \alpha[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[}.$$

Le réel l est appelé "limite à droite" de f en x_0, et on note $l = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x)$ ou bien $l = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, cette limite à droite est unique.
De même, on dit que l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs infèrieures si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend encore une fois de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } 0 < x_0 - x < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0 - \alpha, x_0[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[}.$$

Le réel l est appelé "limite à gauche" de f en x_0, et on note $l = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ ou bien $l = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, cette limite à gauche est, là encore, unique.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Il est clair que $x = 0$ n'est pas un point isolé de $D = \mathbb{R}^*$.
Ensuite,
- si $x > 0$, on a $|x| = x$ donc $f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$;
- si $x < 0$, on a $|x| = -x$ donc $f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Remarque. L'équivalence suivante découle très facilement des définitions précédentes :

$$(f \text{ possède une limite en } x_0) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ possède une limite à gauche et à droite en } x_0 \\ \underline{\text{qui sont égales}} \end{array} \right).$$

1.2.2 Limite en x infini

On suppose que f est définie sur $D =]a, +\infty[$.
Par définition, le réel l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel M (qui dépend toujours a priori de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } x > M)}_{x \in D \cap]M, +\infty[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[}.$$

On note alors $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, on admet à nouveau que cette limite est unique.
La définition de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ est analogue.

1.2.3 Théorèmes pratiques sur les limites

Dans tout ce paragraphe, on peut remplacer x_0 par $\pm\infty$.

Théorème 1 – *Si f possède une limite en x_0, alors il existe un intervalle centré en x_0 sur lequel f est bornée.*

Démonstration. On sait que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Choisissons $\varepsilon = 1$ et traduisons l'existence de cette limite à l'aide de la définition : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap D, \ |f(x) - L| < 1.$$

Cela implique que $|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$ pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap D$, ce qui montre que f est bornée par $1 + |L|$ sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. ■

Théorème 2 – *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et que $f(x) \geq 0$ sur D, alors $l \geq 0$.*

Attention : Dans le théorème 2, l'inégalité est large même si $f(x) > 0$ sur D.
Ainsi, par exemple, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^* = D$, mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Corollaire :

$$\boxed{\left. \begin{array}{c} f(x) \leq g(x), \ \forall x \in D \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \end{array} \right\} \Longrightarrow l \leq l'}$$

Théorème 3 – *Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur D et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.*

Application : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

On vérifie en effet que $x\cos x \leq \sin x \leq x$ pour tout $x\in[0,\pi]$. Ainsi, en divisant par $x\neq 0$, il vient :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,\ \forall x \in]0,\pi].$$

Comme $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$ et que $\cos(-x)=\cos x$ pour tout $x\neq 0$, on en déduit que :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1,\ \forall x \in [-\pi,0[\cup]0,\pi].$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, donc le théorème 3 (dit "théorème d'encadrement") impose $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Théorème 4 – *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$ *alors*

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+\lambda g(x)]=l+\lambda l'$, $(\lambda\in\mathbb{R})$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=ll'$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{l'}$ *si* $l'\neq 0$.

Equivalent. En particulier, si $l=l'$, on a $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. On dit alors que f est équivalent à g en x_0 et on note $f \overset{x_0}{\sim} g$.
On vient ainsi de voir que $\sin x \overset{0}{\sim} x$.

Théorème 5 – *Soient* f *définie sur* D *et* g *définie sur* D' *tel que* $f(D)\subset D'$. *Alors :*

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\\ \lim\limits_{x\to l} g(x)=L\end{array}\right\}\Longrightarrow\left(\lim_{x\to l}(g\circ f)(x)=L\right),$$

où $g\circ f$ est la fonction définie pour tout $x\in D$ par $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$.

Application : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}}$

En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$, donc $\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2$ pour tout $x\neq 0$. Or, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2}=0$ et l'on vient de voir que $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$, donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}=1$ d'après le théorème 5. Ensuite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$

d'après le théorème 4, ce qui montre bien que $1-\cos x \overset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.

1.3 Limite infinie

1.3.1 Définition et exemples fondamentaux

Soit f une fonction numérique de domaine D et x_0 un point non isolé de D.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si, à tout réel $M > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend généralement de M) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } |x - x_0| < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[} \Longrightarrow \underbrace{(f(x) \geq M)}_{f(x) \in [M,+\infty[}.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
Dans le cas où elle existe, on admet que cette limite est unique.
La définition de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ est analogue.

Remarque. On vérifie facilement que :

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0\right).$$

Par contre, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ ne tend pas forcément vers l'infini lorque x tend vers x_0.
En effet, on a par exemple $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ mais $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ alors que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
En fait, on peut seulement écrire l'implication suivante :

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty\right).$$

De même que pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on dira que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si, à tout réel $M > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $X > 0$ (qui dépend généralement de M) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } x > X)}_{x \in D \cap]X,+\infty[} \Longrightarrow \underbrace{(f(x) \geq M)}_{f(x) \in [M,+\infty[}.$$

Exemples.

- <u>Limite d'un polynôme quand $|x| \to +\infty$.</u>
  Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Alors, pour tout $x \neq 0$,

  $$P(x) = a_n x^n \left[1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}}_{\varepsilon(x)}\right],$$

  avec $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$. Par suite, $P \overset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ donc

  $$\lim_{|x| \to +\infty} P(x) = \lim_{|x| \to +\infty} a_n x^n = \infty,$$

  l'écriture $\lim\limits_{|x| \to +\infty} a_n x^n = \infty$ incluant l'une des situations suivantes :

  - $a_n x^n$ tend vers $+\infty$, ce qui est le cas lorsque $a_n > 0$, que n est pair et que x tend vers $\pm\infty$, ainsi que lorsque $a_n > 0$, que n est impair et que x tend vers $+\infty$;
  - $a_n x^n$ tend vers $-\infty$: ce qui est le cas lorsque $a_n < 0$, que n est pair et que x tend vers $\pm\infty$;
  - $a_n x^n$ n'a pas de limite à l'infini mais $|a_n x^n|$ tend vers $+\infty$, ce qui est le cas lorsque n est impair et que x tend vers $\pm\infty$.
- Limite d'une fraction rationnelle quand $|x| \to +\infty$.
  Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $m \in \mathbb{N}$, $b_m \neq 0$. D'après ce que l'on vient de voir,
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n[1 + \varepsilon(x)]}{b_m x^m[1 + \eta(x)]},$$
  avec $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \varepsilon(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \eta(x) = 0$.
  Par suite :
$$\frac{P}{Q} \overset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ donc } \lim_{|x|\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m. \end{cases}$$

1.3.2 Règles de calcul sur les limites infinies

Dans cette section, la notation $\lim f$ désigne aussi bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ et l'écriture $\lim f = \infty$ signifie que f tend vers $\pm\infty$ sans que l'on se préoccupe du signe de la limite.
Les principales règles de calcul sur les limites sont les suivantes :

(i)	$f(x) \leq g(x)$ sur D et $\lim f = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim g = +\infty$
(ii)	$\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim(f+g) = +\infty$
(iii)	$\lim f = \infty$ et $\lim g = \infty$	$\Longrightarrow$	$\lim(fg) = \infty$
(iv)	$\lim f = \infty$ et $\lim g = l$	$\Longrightarrow$	$\lim(fg) = \infty$
(v)	$\lim f = \infty$ et $\lim g = l$	$\Longrightarrow$	$\lim \frac{f}{g} = \infty$
(vi)	$\lim f = l$ et $\lim g = \infty$	$\Longrightarrow$	$\lim \frac{f}{g} = 0$

On remarque que les opérations précédentes sur les limites infinies ne permettent pas de conclure dans les cas suivants :

$$\begin{array}{lll} \lim f = +\infty \text{ et } \lim g = -\infty, & \lim(f+g) = ? & (\text{indétermination } \infty - \infty) \\ \lim f = \infty \text{ et } \lim g = 0, & \lim(fg) = ? & (\text{indétermination } \infty \times 0) \\ \lim f = \infty \text{ et } \lim g = \infty, & \lim \frac{f}{g} = ? & (\text{indétermination } \frac{\infty}{\infty}) \\ \lim f = 0 \text{ et } \lim g = 0, & \lim \frac{f}{g} = ? & (\text{indétermination } \frac{0}{0}) \end{array}$$

Dans ces cas indéterminés, la limite (si elle existe) est obtenue par un calcul explicite et non par l'application de théorèmes généraux.

Exemple. En encadrant $\frac{\sin x}{x}$ sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ par 1 et $\cos x$, on a levé l'indétermination "$\frac{0}{0}$" relative au calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

1.4 Continuité

1.4.1 Continuité en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur D et $x_0 \in \overline{D}$.
On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque. Par définition de la limite, f est continue en x_0 s'il existe une fonction ε telle que

$$\forall x \in D,\ f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Un exemple : la fonction sinus

Soient $f = \sin$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \leq |x - x_0|,$$

car on sait que $\sin y \leq y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Par suite, le théorème d'encadrement impose $\lim\limits_{x \to x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$, donc la fonction sin est bien continue en x_0.

Cas de discontinuité

Une fonction donnée, f peut ne pas être continue en un point x_0 pour différentes raisons :

- $\underline{f \text{ n'est pas définie en } x_0.}$
  Par exemple, $x_0 = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$.
- $\underline{f \text{ est définie en } x_0 \text{ et possède une limite } l \neq f(x_0) \text{ en ce point.}}$
- $\underline{f \text{ ne possède pas de limite en } x_0.}$
  Deux cas peuvent se présenter :
  - f ne possède pas de limite à gauche ou à droite en x_0.
    Par exemple, $x_0 = 0$ et $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
  - f possède une limite à gauche et une limite à droite en x_0, qui sont distinctes.
    Par exemple, $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = E(x)$. On a en effet :

$$\underbrace{\lim_{x \overset{<}{\to} n} f(x)}_{n-1} \neq \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} n} f(x)}_{f(n)=n}.$$

Par définition, on dira que f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si :

$$\begin{cases} (a) & f \text{ est définie en } x_0 \\ (b) & \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\text{resp. } \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)). \end{cases}$$

On remarque ainsi que :

$$\boxed{(f \text{ est continue en } x_0) \Longleftrightarrow (f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0)}$$

Prolongement par continuité

Soit une fonction f non définie en un point x_0, mais qui possède une limite en x_0, c'est-à-dire qui possède une limite à droite et une limite à gauche en ce point, qui sont égales :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

La fonction f n'est pas continue en x_0 car elle n'est pas définie en ce point.
Mais la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0, \end{cases}$ elle, est continue en x_0. De plus, g est coïncide avec f partout où la fonction f est définie. C'est pourquoi, on dit que "g réalise un prolongement de f par continuité".

Exemples.

1. Soient $x_0 = 0$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, la fonction $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ prolonge f par continuité.
2. Soient $x_0 = 0$ et $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Comme

$$\underbrace{\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)}_{-1} \neq \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)}_{1},$$

   il n'est pas possible de prolonger cette fonction par continuité en 0.

Opérations sur les fonctions continues

Des théorèmes utilisés pour le calcul des limites, on déduit facilement les règles suivantes :

(i)	f et g sont continues en x_0	$\Longrightarrow$	$f + g$ et λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont continues en x_0
(ii)	f et g sont continues en x_0	$\Longrightarrow$	fg est continue en x_0
(iii)	f et g sont continues en x_0, $g(x_0) \neq 0$	$\Longrightarrow$	$\frac{f}{g}$ est continue en x_0
(iv)	f est continue en x_0, g est continue en $f(x_0)$	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ est continue en x_0

Application. La fonction identité $x \mapsto x$ est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$, donc, d'après (ii), $x \mapsto x^n$ est continue en x_0 pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Il résulte ainsi de (i) que tout polynôme est continu en x_0, et de (iii) que toute fraction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

1.4.2 Continuité sur $[a, b]$

Définition

Une fonction f est dite continue sur $[a, b]$ si :

$$\begin{cases} (a) & f \text{ est continue en tout point } x_0 \in]a, b[; \\ (b) & f \text{ est continue à droite en } x = a \text{ et à gauche en } x = b. \end{cases}$$

Image d'un intervalle fermé par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
L'image de $[a, b]$ par f est $f([a, b]) = \{f(x),\ x \in [a, b]\}$.
Elle est caractérisée par le théorème suivant :

THÉORÈME 6 – $f([a, b])$ *est un intervalle fermé* $[m, M]$.

Ce théorème (admis) donne en fait 3 informations distinctes :

1. f est bornée sur $[a, b]$.
   Cela signifie que :
   – f est majorée sur $[a, b]$: il existe $M_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M_0$ pour tout $x \in [a, b]$.
   Le réel M_0 est un majorant de f sur $[a, b]$. Il n'est pas unique (car $M_0 + 1$ est également un majorant de f sur $[a, b]$). On montre que l'ensemble des majorants de f sur $[a, b]$ possède un plus petit élément, appelé "borne supérieure de f sur $[a, b]$". On la note
   $$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ ou bien } M = \sup(f([a, b]).$$
   Ainsi, par exemple, $\sup(\{1\}) = 1$ et $\sup([0, 1]) = \sup([0, 1[) = 1$.
   On peut remarquer que $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ n'appartient pas forcément à $f([a, b])$.
   – f est minorée sur $[a, b]$: il existe $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m_0$ pour tout $x \in [a, b]$.
   Le réel m_0 est un minorant de f sur $[a, b]$. Il n'est pas unique (car $m_0 - 1$ est également un minorant de f sur $[a, b]$). On montre que l'ensemble des minorants de f sur $[a, b]$ possède un plus grand élément, appelé "borne inférieure de f sur $[a, b]$". On la note
   $$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ ou bien } m = \inf(f([a, b]).$$
   Ainsi, par exemple, $\inf(\{1\}) = 1$ et $\inf([0, 1]) = \inf(]0, 1]) = 0$.
   On peut à nouveau remarquer que $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ n'appartient pas forcément à $f([a, b])$ non plus.

   Ainsi, dans le cas particulier où $f(x) = x^2$ et $[a, b] = [-1, 1]$, par exemple, on a $m = 0$ et $M = 1$.

2. f atteint ses bornes.
   Cela signifie qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ (pas forcément unique) tel que $f(\alpha) = m$ ainsi que $\beta \in [a, b]$ (pas forcément unique non plus) tel que $f(\beta) = M$.
   Ainsi, en prenant à nouveau $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = x^2$, on a $f([a, b]) = [0, 1]$, et l'on remarque bien que $m = 0 = f(0)$ et $M = 1 = f(\pm 1)$.
   Par contre, si l'intervalle est ouvert, $f(]-1, 1[) = [0, 1[$, et l'on constate que $M = 1$ n'est égal à aucune image $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

3. Toute valeur $\mu \in [m, M]$ est l'image d'au moins un $x \in [a, b]$.
   On résume cette phrase en disant que "f est une surjection de $[a, b]$ sur $[m, M]$".

1.4.3 Fonction réciproque

Rappels et définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si x_1 et x_2 sont deux valeurs distinctes de I, on appelle taux de variation de f de x_1 à x_2, le rapport

$$T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Par définition, si
- $T_f(x_1, x_2) \geq 0$ pour tout couple (x_1, x_2) de $I \times I$, f est dite croissante sur I (strictement croissante si $T_f > 0$) ;
- $T_f(x_1, x_2) \leq 0$ pour tout couple (x_1, x_2) de $I \times I$, f est dite décroissante sur I (strictement décroissante si $T_f < 0$).

Une fonction monotone sur I est une fonction qui est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarque. Il résulte facilement des définitions précédentes que :

$$(f \text{ est croissante sur } I) \iff (\forall (x_1, x_2) \in I \times I,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)),$$

alors que

$$(f \text{ est décroissante sur } I) \iff (\forall (x_1, x_2) \in I \times I,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Définition de f^{-1}

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$.
Alors, d'après le théorème 6, $f([a, b]) = [m, M] = [f(a), f(b)]$.
L'application f est donc surjective de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
De plus, comme elle est strictement croissante sur $[a, b]$, elle vérifie :

$$\forall (x, x') \in [a, b]^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

On dit alors que f est injective sur $[a, b]$.
Nous voyons ainsi que tout $y \in [f(a), f(b)]$ possède un unique antécédent x dans $[a, b]$: f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
Plus généralement, on démontre que :

$$\boxed{\text{Toute fonction } f \text{ continue et strictement monotone sur } I \text{ définit une bijection de } I \text{ sur } f(I).}$$

Ainsi, quel que soit $y \in f(I)$, il existe un unique antécédent $x \in I$ tel que $f(x) = y$. On peut donc définir une bijection de $f(I)$ sur I, notée f^{-1} telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ x \in I \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I). \end{array} \right.$$

f^{-1} est la fonction réciproque de f.
On a bien sûr :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f^{-1} \circ f = Id_I & (\text{c'est-à-dire } (f^{-1} \circ f)(x) = x,\ \forall x \in I) \\ f \circ f^{-1} = Id_{f(I)} & (\text{c'est-à-dire } (f \circ f^{-1})(y) = y,\ \forall y \in f(I)). \end{array} \right.$$

Exemple. Soient $I = \mathbb{R}_+$ et $f(x) = x^2$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, et

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Ici, on voit donc que f^{-1} est la fonction racine carrée.

Attention : il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} avec $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$. Ces deux fonctions n'ont, en général, rien à voir entre elles. Ainsi, sur l'exemple précédent, on voit bien que $\sqrt{x}$ n'est pas égal à $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriétés de f^{-1}

Les trois principales propriétés sont les suivantes :

- f^{-1} est monotone de même sens de variation que f.
  En effet, pour tout $(y, y') \in f(I)^2$ vérifiant $y \neq y'$, il existe x et x' (distincts) dans I tels que $y = f(x)$, $y' = f(x')$, et on a alors :
  $$T_{f^{-1}}(y, y') = \frac{f^{-1}(y') - f^{-1}(y)}{y' - y} = \frac{x' - x}{f(x') - f(x)} = \frac{1}{T_f(x, x')}.$$
- f^{-1} est continue sur $f(I)$.
  Ce résultat est admis.
- La courbe représentative de f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie par rapport à la première bissectrice.
  En effet, un point M appartient à la courbe représentative C de f s'il existe $x \in I$ tel que $M = (x, f(x))$. De même, un point M' appartient à la courbe représentative C' de f^{-1} s'il existe $y \in f(I)$ tel que $M' = (y, f^{-1}(y))$. Or, comme $y \in f(I)$, on a $y = f(x)$ pour un certain $x \in I$, donc $M' = (f(x), x)$ est le symétrique par rapport à la première bissectrice du point $M = (x, f(x))$ de C.

1.4.4 Résolution de $f(x) = 0$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Si $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.
En effet, supposons pour simplifier que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. En vertu du théorème 6, on a $f([a, b]) = [m, M]$, donc les inégalités $m \leq f(a)$ et $M \geq f(b)$ impliquent $m < 0$ et $M > 0$, ce qui montre que $0 \in f([a, b])$. Le cas $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ se traite de façon analogue.
Enfin, si l'on suppose de plus que f est strictement monotone sur $[a, b]$, cette solution est unique.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est strictement monotone sur } [a, b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (f(x) = 0 \text{ possède une unique solution } r \in [a, b].)}$$

Chapitre 2

Dérivation

2.1 Généralités

Soient I un intervalle ouvert, x_0 un point de I et f une fonction définie sur I.

2.1.1 Définition

On dit que f est dérivable en x_0 si,

$$\lim_{x\to x_0} T_f(x_0,x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, le réel L est appelé “nombre dérivé de f en x_0” et est noté $f'(x_0)$.

Exemple. La fonction cos est dérivable en n'importe quel point $x_0 \in \mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x = \cos\left[(x-x_0)+x_0\right] = \cos x_0 \cos(x-x_0) - \sin x_0 \sin(x-x_0)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\},\ T_{\cos}(x_0,x) = \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \cos x_0 \frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0} - \sin x_0 \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}.$$

Or, on a vu dans le chapitre “Limites et continuité” que $\sin y \overset{0}{\sim} y$ et $1-\cos y \overset{0}{\sim} \frac{y^2}{2}$, donc $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sin(x-x_0)}{x-x_0} = 1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1-\cos(x-x_0)}{x-x_0} = 0$.
Par suite, on a finalement :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = -\sin x_0,$$

ce qui prouve bien que la fonction cosinus est dérivable en x_0 de nombre dérivé $(-\sin x_0)$.

2.1.2 Autre formulation

Si la fonction f est dérivable en x_0, alors on a, par définition, $\lim\limits_{x\to x_0} \underbrace{\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right)}_{\varepsilon(x-x_0)} = 0.$

Ainsi,

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0.$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction f satisfaisant l'égalité précédente est dérivable en x_0, de nombre dérivé $f'(x_0)$.
On a donc l'équivalence suivante :

$$\boxed{\begin{pmatrix} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ \text{de nombre dérivé } f'(x_0) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{il existe une fonction } x \mapsto \varepsilon(x-x_0) \text{ telle que :} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0 \end{pmatrix}}$$

2.1.3 Interprétation géométrique

Soit $C = \{M = (x, f(x)),\ x \in I\}$ la courbe représentative de f.
D'après l'équivalence précédente, toute fonction f dérivable en x_0 vérifie

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

On voit donc que la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

qui passe par le point $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in C$, "approche" la courbe C au point M_0.
Cette droite s'appelle la tangente à C en M_0.

2.1.4 Lien avec la continuité

Si f est dérivable en x_0, l'équivalence précédente montre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui prouve que f est continue en x_0 :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \Longrightarrow f \text{ est continue en } x_0.}$$

Attention : la réciproque est fausse. Autrement dit, il existe des fonctions continues en x_0 qui ne sont pas dérivables en ce point.
Ainsi, la fonction $f(x) = |x|$, définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 0$. Mais elle n'est pas dérivable en ce point car la taux de variation $T_f(0, x)$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}_{\frac{-x}{x}} = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}_{\frac{x}{x}} = 1.$$

2.1.5 Cas de non dérivabilité

– $T_f(x_0, x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite à gauche et une limite à droite, qui sont distinctes.
  On pose alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0), & \text{dérivée à gauche de } f \text{ en } x_0, \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0), & \text{dérivée à droite de } f \text{ en } x_0. \end{cases}$$

La courbe C possède une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite en M_0. On dit que M_0 est un “point anguleux” de C.
Ainsi, dans l'exemple précédent on a vu que l'origine O est point anguleux de la courbe représentative de la fonction $f(x) = |x|$.

– $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$.
Par abus de langage, on dit que la courbe C possède une tangente verticale en M_0.
C'est le cas notamment pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

car elle vérifie :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

– $\displaystyle\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ne possède pas de limite en x_0.
C'est le cas par exemple pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

puisque l'on sait que $\frac{f(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

2.2 Fonction dérivée

2.2.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur I et dérivable en tout point de I. Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x), \end{array}$$

notée f', est appelée dérivée de f.

2.2.2 Dérivées successives

Si la fonction f' est également dérivable sur I, on définit la dérivée seconde de f, notée f'', par $f'' = (f')'$. Plus généralement, les dérivées successives (si elles existent) de f sont notées : $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien sûr :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

L'ensemble des fonctions f dont la dérivée $n^{\text{ième}}$, $n \geq 1$, est définie en tout point de I est noté $D^n(I)$. Bien entendu, on a

$$D^n(I) \subset D^{n-1}(I).$$

Si $f \in D^n(I)$, alors $f^{(n)}$ existe donc $f^{(n-1)}$ est continue et nécessairement, $f^{(p)}$ est continue pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Si $f^{(n)}$ est une fonction continue sur I, alors f est dite de classe C^n sur I, et on note

$$f \in C^n(I).$$

Si f est indéfiniment dérivable sur I, f est dite de classe C^∞ sur I, et on note

$$f \in C^\infty(I).$$

Remarque. Si $f \in C^n(I)$ alors $f^{(n-1)}$ est dérivable, donc continue sur I. Par suite, $f \in C^{n-1}(I)$ et l'on a l'inclusion suivante :

$$C^n(I) \subset C^{n-1}(I).$$

2.2.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Opérations algébriques

THÉORÈME 1 – *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Alors, λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$ et fg sont dérivables sur I et,*

$$\boxed{\forall x \in I,\ (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),\ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),\ (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

De plus, $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$ et,

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Formule de Leibnitz

Si f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I, $n \geq 2$, on démontre (par récurrence sur n) que fg est également de classe C^n sur I, et on a de plus :

$$\boxed{\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)}$$

Composition

THÉORÈME 2 – *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ dérivable en x_0 et,*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)}$$

Exemple. La fonction $x \overset{h}{\mapsto} \cos(x^2)$ s'écrit $h(x) = (g \circ f)(x)$ avec $g(y) = \cos y$ et $f(x) = x^2$. Or, f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x \text{ alors que } \forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = -\sin y.$$

Par suite, $h'(x) = -\sin(x^2) \times (2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dérivée de la réciproque

THÉORÈME 3 – *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Si f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et,*

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}}$$

Démonstration. Soient $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$ pour $x \in I$. On a

$$T_{f^{-1}}(y_0, y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{T_f(x_0, x)}.$$

Comme f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, on a bien

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{T_f(x_0, x)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Par suite, f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. ■

Exemple. La réciproque de la fonction $f(x) = x^2$ restreinte à $\mathbb{R}_+$ est la fonction racine carrée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en entier, mais $f'(x) = 2x$ est non nulle si et seulement si $x \neq 0$. Par suite, f^{-1} est dérivable en tout $y = x^2 > 0$, et

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Dérivée des fonctions usuelles

A l'aide des résultats obtenus précédemment, on obtient l'expression de la dérivée des fonctions usuelles suivantes :

$(x^\alpha)'$	$=$	$\alpha x^{\alpha-1}, \ \alpha \in \mathbb{R}$	$(\ln\lvert x\rvert)'$	$=$	$\frac{1}{x}$	$(a^x)'$	$=$	$\ln a \times a^x, \ a > 0$
$\sin' x$	$=$	$\cos x$	$\cos' x$	$=$	$-\sin x$	$\tan' x$	$=$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\mathrm{e}^x)'$	$=$	e^x	ch'x	$=$	shx	sh'x	$=$	chx
$\arcsin' x$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos' x$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan' x$	$=$	$\frac{1}{1+x^2}$

2.3 Formule des accroissements finis et applications

2.3.1 Formule des accroissements finis

THÉORÈME 4 – *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Ce théorème, appelé théorème des accroissements finis (noté TAF en abrégé), est admis.

2.3.2 Application au sens de variation des fonctions

THÉORÈME 5 – *Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f'(x)=0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est constante sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $x \in]a,b]$. La fonction f est continue sur $[a,x]$ et elle est dérivable sur $]a,x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,x[$ tel que

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)=0.$$

Par suite, $f(x)=f(a)$ pour tout $x \in]a,b]$, ce qui montre bien que f est constante sur $[a,b]$. ■

THÉORÈME 6 – *Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f'(x)>0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soient $(x,x') \in]a,b[^2$ tels que $x<x'$. La fonction f est continue sur $[x,x']$ et dérivable sur $]x,x'[$, donc le théorème des accroissements finis s'applique : il existe $c \in]x,x'[$ tel que

$$f(x')-f(x)=f'(c)(x'-x).$$

Par hypothèse, $f'(c)>0$, donc $T_f(x,x')>0$ ■

Par une démonstration analogue à la précédente, on montre plus généralement que si f est dérivable sur un <u>intervalle I</u>, on a les équivalences suivantes :

$\forall x \in I,\ f'(x)=0$	$\Longleftrightarrow$	$\forall x \in I,\ f(x)=C$
$\forall x \in I,\ f'(x)>0$	$\Longleftrightarrow$	f est strictement croissante sur I
$\forall x \in I,\ f'(x)\geq 0$	$\Longleftrightarrow$	f est croissante sur I
$\forall x \in I,\ f'(x)<0$	$\Longleftrightarrow$	f est strictement décroissante sur I
$\forall x \in I,\ f'(x)\leq 0$	$\Longleftrightarrow$	f est décroissante sur I

2.3.3 Extréma locaux d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que le point $x_0 \in I$ est un maximum local de f s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que

$$\forall x \in I,\ (x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[) \Longrightarrow (f(x)\geq f(x_0))\,.$$

Autrement dit : f admet un maximum local en x_0 si $f(x)\geq f(x_0)$ sur un voisinage de x_0.
De même, on dit le point $x_0 \in I$ est un minimum local de f, s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que

$$\forall x \in I,\ (x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[) \Longrightarrow (f(x)\leq f(x_0))\,.$$

Les maxima ou minima locaux de f sont appelés extréma locaux de f.

Recherche des extréma locaux

Supposons que f est dérivable sur I.

THÉORÈME 7 – *Les extréma locaux de f sont à rechercher parmi les zéros de f'. Autrement dit :*

$$(x_0 \textit{ est un extrémum local de } f) \Longrightarrow (f'(x_0) = 0)$$

Démonstration. Supposons que x_0 est un maximum local de f, le cas d'un minimum local se traitant de façon totalement analogue.
Supposons un instant que $f'(x_0) \neq 0$. Comme la fonction f est dérivable en x_0, il existe une fonction $x \mapsto \varepsilon(x - x_0)$ telle que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)], \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

Or, x_0 est maximum local de f, donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[, \; f(x) \geq f(x_0).$$

Mais, comme $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2[, \; |\varepsilon(x - x_0)| \leq \frac{1}{2}|f'(x_0)|.$$

Par suite,

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2[, \; |f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)| \geq |f'(x_0)| - \underbrace{|\varepsilon(x - x_0)|}_{\leq \frac{1}{2}|f'(x_0)|} \geq \frac{1}{2}|f'(x_0)|.$$

Posons maintenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$. D'après ce qui précède, $f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)$ est non nul sur $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, donc $x \mapsto (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)]$ ne peut avoir un signe constant sur $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Ce qui contredit l'inégalité

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[.$$

Par suite, on a forcément $f'(x_0) = 0$. ■

Attention : la condition $f'(x_0) = 0$ ne suffit pas à établir que x_0 est un extrémum local de f.

- En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier et sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x_0 = 0$ bien que le signe de $f(x) - f(0)$ soit celui de x. Ce phénomène provient de ce que f' ne change pas de signe au voisinage de x_0.
- De plus, il faut prendre garde que le théorème ne s'applique pas lorsque f n'est pas dérivable en x_0 Ainsi, $f(x) = |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée partout non nulle, mais elle admet un minimum local en $x_0 = 0$.
- Enfin, les extrémités de I peuvent être des extréma locaux de f sur I sans que la dérivée de f ne s'annule en ce point. C'est notamment le cas pour $f(x) = x$ et $I = [0, 1]$. La dérivée de f ne s'annule pas sur I, mais 0 et 1 sont respectivement minimum et maximum de f sur I.

Conclusion. Les extréma locaux d'une fonction f définie sur I sont donc à rechercher parmi :
- les extrémités de I,
- les points en lesquels f n'est pas dérivable,
- les points en lesquels f' s'annule en changeant de signe.

2.3.4 Inégalité des accroissements finis

THÉORÈME 8 – *Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et telles que $|f'(x)| \leq g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration. Pour tout $x \in [a, b]$, posons $h^{\pm}(x) = g(x) - g(a) \pm (f(x) - f(a))$. La fonction $h^{\pm}$ est dérivable sur $]a, b[$, et,

$$\forall x \in]a, b[, \ (h^{\pm})'(x) = g'(x) \pm f'(x) \geq g'(x) - |f'(x)| \geq 0.$$

La fonction $h^{\pm}$ est donc croissante sur $[a, b]$, ce qui impose $h^{\pm}(b) \geq h^{\pm}(a)$. Comme $h^{\pm}(a) = 0$ et $h^{\pm}(b) = g(b) - g(a) \pm (f(b) - f(a))$, on a

$$g(b) - g(a) \pm (f(b) - f(a)) \geq 0,$$

ce qui montre bien :

$$g(b) - g(a) \geq |f(b) - f(a)| \blacksquare$$

2.4 Formules de Taylor

Pour toute fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on a vu dans la section précédente qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Nous allons voir maintenant que cette formule peut être généralisée.

2.4.1 Formule de Taylor-Lagrange

Enoncé du résultat

THÉORÈME 9 – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, dérivable à l'ordre $n + 1$ sur $]a, b[$ (en résumé : $f \in C^n([a, b]) \cap D^{n+1}(]a, b[)$).*
Alors, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Cette formule s'appelle formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n + 1$.
Le terme $\dfrac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(c)$ est le reste de Lagrange à l'ordre $n + 1$.

Autre écriture. Posons $h = b - a$. Comme $c \in]a, b[=]a, a+h[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $c = a + \theta h$. La formule précédente devient ainsi :

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{\text{polynôme de Taylor de } f \text{ en } a \text{ à l'ordre } n} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Application : inégalité de Taylor-Lagrange

Si f satisfait les hypothèses du théorème 9, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a+h) - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)\right) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Si, de plus, il existe $M \geq 0$ tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, a+h[$, alors

$$\boxed{\left| f(a+h) - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)\right) \right| \leq M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Cette inégalité, dite de Taylor-Lagrange, montre que l'erreur commise en approximant $f(a+h)$ par le polynôme de Lagrange $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)$ est, sous l'hypothèse précédente, inférieure à $\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}M$.

Exemple. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction exp est indéfiniment dérivable sur $[0, h]$, et

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (\exp)^{(p)}(x) = \exp x.$$

Par suite,

$$\forall x \in]0, h[,\ |(\exp)^{(n+1)}(x)| = \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^{|h|}.$$

On en déduit :

$$\left| \mathrm{e}^h - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!}\right) \right| \leq \mathrm{e}^{|h|} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.4.2 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Lagrange est une formule “globale” car elle est valable sur l'intervalle $[a, a+h]$. On dispose, sous des conditions plus faibles que celles du théorème 9, d'une formule “locale”, appelée formule de Taylor-Young, et qui fait l'objet du théorème (que l'on admettra) suivant.

THÉORÈME 10 – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, a+h]$, telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors, il existe une fonction $h \mapsto \varepsilon(h)$ telle que :*

$$\begin{cases} (i) & f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^n}{n!}\varepsilon(h), \\ (ii) & \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \end{cases}$$

La formule de Taylor-Young assure de l'existence d'un polynôme $P_n(h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)$ de degré inférieur ou égal à n, qui satisfait :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - P_n(h)}{h^n} = 0.$$

L'information fournie par cette formule est valable au voisinage de a. C'est pourquoi, on parle de "formule locale".

Exemple. Choisissons $a = 0$, $f = \sin$ et fixons n dans $\mathbb{N}^*$. La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin^{(p)}(x) = \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right).$$

Par suite,

$$\sin^{(p)}(0) = \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, en prenant $n = 4$, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h - (h - \frac{h^3}{6})}{h^4} = 0,$$

ce qui montre que $\sin h$ peut être approché par $h - \frac{h^3}{6}$ au voisinage de 0.

Chapitre 3

Fonctions logarithme, exponentielle et hyperboliques

3.1 Quelques préliminaires concernant la fonction "puissance"

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

3.1.1 Fonction puissance "entière"

Il est bien connu que la fonction $x \overset{f_q}{\mapsto} x^q$ est une fonction continue et strictement croissante sur le domaine

$$D_q = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } q \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } q \text{ est impair.} \end{cases}$$

C'est donc une bijection de D_q sur

$$I_q = f(D_q) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } q \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } q \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cela permet de définir la fonction réciproque $f_q^{-1} : I_q \to D_q$ de f_q, qui vérifie par définition :

$$\begin{cases} (i) & f_q^{-1} \circ f_q = Id_{D_q} & \text{soit} & \forall x \in D_q,\ f_q^{-1}\left[f_q(x)\right] = f_q^{-1}(x^q) = x \\ (ii) & f_q \circ f_q^{-1} = Id_{I_q} & \text{soit} & \forall y \in I_q,\ f_q\left[f_q^{-1}(y)\right] = \left[f_q^{-1}(y)\right]^q = y. \end{cases}$$

3.1.2 Fonction puissance "fractionnaire"

Fonction racine $q^{\text{ième}}$

Les égalités (i) et (ii) précédentes incitent évidemment à représenter $f_q^{-1}(y)$ par le symbole $y^{\frac{1}{q}}$ (c'est une notation). Comme la fonction f_q^{-1}, appelée fonction racine $q^{\text{ième}}$, est également notée $\sqrt[q]{\cdot}$, on a donc :

$$\forall y \in I_q,\ \sqrt[q]{y} = y^{\frac{1}{q}}.$$

Généralisation

Pour n'importe quel entier relatif p, il est maintenant naturel de définir $y^{\frac{p}{q}}$ pour tout $y \in I_p$ sauf éventuellement en $y = 0$ lorsque $p \in \mathbb{Z}^*_-$, par la formule évidente suivante :

$$y^{\frac{p}{q}} = \left[y^{\frac{1}{q}}\right]^p.$$

Nous avons donc défini de façon rigoureuse la fonction $y \mapsto y^r$ pour tout $\underline{r \in \mathbb{Q}}$.

Remarque concernant la dérivabilité : il est facile de vérifier (à l'aide du théorème de dérivation des fonctions réciproques) que la fonction $y \mapsto y^r$ précédente est dérivable sur son domaine de définition I et que sa dérivée s'écrit :

$$\forall y \in I,\ (y^r)' = ry^{r-1}.$$

Le cas irrationnel

Si l'on cherche à généraliser encore la définition précédente il faut envisager le cas où r est irrationnel (c'est-à-dire que $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$). Pour cela, on doit prélablement introduire les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

3.2 Fonction logarithme népérien

3.2.1 Définition

Notion de primitive

Si f est une fonction définie sur un intervalle I, on appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x).$$

Lorsque f est continue sur I, on montre (ce sera fait dans le cours sur l'intégration) qu'elle possède une infinité de primitives sur I. Si F désigne l'une d'entre-elles, l'ensemble des primitives de f sur I est $x \mapsto F(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$. On note $\int f(x)dx$ cet ensemble.
Ainsi, f possède une unique primitive sur I qui s'annule en $x_0 \in I$:

$$x \mapsto F(x) - F(x_0).$$

On la note $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Cas de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*_+$. On appelle "logarithme népérien", et on note ln, la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^*_+$ qui s'annule en $x = 1$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \forall x > 0,\ \ln' x = \frac{1}{x}, \\ \ln 1 = 0. \end{cases}$$

3.2.2 Propriétés

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi_a : a \mapsto ax$ et $\varphi_a = \ln \circ \psi_a$, c'est-à-dire :

$$\forall x > 0,\ \varphi_a(x) = (\ln \circ \psi_a)(x) = \ln [\psi_a(x)] = \ln(ax).$$

On a donc

$$\forall x > 0,\ \varphi_a'(x) = (\ln' \circ \psi_a)(x) \times \psi_a'(x) = \frac{\psi_a'(x)}{\psi_a(x)} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \ln(ax)$ sont donc deux primitives de $\mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \ln(ax) = \ln x + C.$$

En particulier, si $x = 1$, on obtient $\ln a = C$:

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Conséquences.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \begin{cases} \ln(ab) &= \ln a + \ln b \\ \ln(\frac{a}{b}) &= \ln a - \ln b \\ \ln(a^\alpha) &= \alpha \ln a, \qquad \alpha \in \mathbb{Q} \end{cases}}$$

3.2.3 Etude de ln

La fonction ln est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x > 0,\ \ln' x = \frac{1}{x} > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a de plus

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

En effet, A étant un réel strictement positif quelconque, posons $n = E(\frac{A}{\ln 2}) + 1$. Alors,

$$\forall x > 2^n,\ \ln x > \underbrace{\ln 2^n}_{> n \ln 2} > A.$$

Par suite, on a bien touvé $X = 2^n$ tel que $\ln x > A$ dès que $x > X$.

Recherche de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$**,** $\alpha \in \mathbb{Q}_+$**.** Pour tout $t \geq 1$, il est bien connu que

$$1 \leq \sqrt{t} \leq t \Rightarrow \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}},$$

donc, pour tout $x \geq 1$, on a

$$\underbrace{\int_1^x \frac{dt}{t}}_{\ln x} \leq \underbrace{\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}}_{2(\sqrt{x}-1)}.$$

Par suite, on a montré :

$$\forall x \geq 1,\ 0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \underbrace{2\frac{\sqrt{x}-1}{x}}_{\overset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ le théorème d'encadrement implique

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{Q}_+^*,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0}$$

Conséquence.

$$\boxed{\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q}_+^* \end{cases}}$$

Démonstration.

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(\frac{1}{y})}{y^\alpha} = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y^\alpha} = 0. \blacksquare$$

Définiton de e**.** Comme ln (restreinte à $[1, +\infty[$) est continue et strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, il existe un unique réel strictement positif, noté e, tel que

$$\ln e = 1.$$

On montre que $e \approx 2,718$.

3.3 Fonction exponentielle

3.3.1 Définition

La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$: il existe donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ appelée "fonction exponentielle" et notée exp :

$$\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y \in \mathbb{R}_+^*, \end{cases}$$

d'où l'on tire évidemment
$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, & \exp(\ln y) = y \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \ln(\exp x) = x. \end{cases}$$

Conséquences.
- $\exp 0 = 1$ car $\ln 1 = 0$,
- $\exp 1 = e$ car $\ln e = 1$.

3.3.2 Propriétés

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \times \exp x_2}$$

Démonstration.
$$\left.\begin{array}{lcl} y_1 = \exp x_1 & \Leftrightarrow & x_1 = \ln y_1 \\ y_2 = \exp x_2 & \Leftrightarrow & x_2 = \ln y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 + x_2 = \ln(y_1 y_2) \Longrightarrow \underbrace{y_1 y_2}_{\exp x_1 \times \exp x_2} = \exp(x_1 + x_2). \blacksquare$$

Conséquences.
$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \exp(a+b) & = & \exp a \times \exp b \\ \exp(a-b) & = & \frac{\exp a}{\exp b} \\ \exp(\alpha a) & = & (\exp a)^\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{Q} \end{cases}}$$

Remarque. En choisissant $a = 1$ dans la dernière égalité, il vient : $\exp \alpha = (\exp 1)^\alpha = e^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.

3.3.3 Etude de la fonction exp

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle y est dérivable, et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp' x = \frac{1}{\ln'[\exp x]} = \exp x.$$

Comportement en $\pm\infty$.
$$\boxed{\begin{array}{lcllcl} \lim\limits_{x \to +\infty} \exp x & = & +\infty & \lim\limits_{x \to -\infty} \exp x & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x^\alpha} & = & +\infty, \quad \alpha \in \mathbb{Q} & \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha \exp x & = & 0, \quad \alpha \in \mathbb{Q} \end{array}}$$

3.3.4 Fonctions exponentielles généralisées

Rappel

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On pose ensuite $I = \mathbb{R}$ si q est impair, $I = \mathbb{R}_+$ si q est pair. La fonction $f_q : x \mapsto x^q$ est continue et strictement croissante de I sur $f(I) = I$. Par suite, elle possède une fonction réciproque f_q^{-1} de I sur lui-même. Pour tout $x \in I$, on a donc :
$$(f_q^{-1}(x))^q = f_q^{-1}(x^q) = x.$$

C'est pourquoi on préfère noter $x^{\frac{1}{q}}$ à la place de $f_q^{-1}(x)$, de sorte que :

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q = (x^q)^{\frac{1}{q}} = x.$$

Le réel $x^{\frac{1}{q}}$ s'appelle racine $q^{\text{ième}}$ de x.
Comme f_q est dérivable sur I et que $f_q'(x) = qx^{q-1} \neq 0$ pour tout $x \in I^* = I \backslash \{0\}$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est dérivable sur I^*, et

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{(f_q' \circ f_q^{-1})(x)} = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}}.$$

En posant alors, pour chaque $p \in \mathbb{Z}$:

$$\forall x \in I,\ x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

ce qui revient au passage à définir la fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, on obtient finalement :

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q}x^{-\frac{q-1}{q}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Cette formule permet donc d'écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

On va maintenant généraliser la définition de x^α aux réels α non rationnels.

Exposants non rationnels

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha = \exp[\alpha \ln x]}$$

Comme les fonctions exp et ln sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ (x^\alpha)' = \exp[\alpha \ln x] \times \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Conséquence nouvelle écriture de l'exponentielle. Si $x = e$, on a

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, e^\alpha = \exp \alpha}$$

Généralisation. Soient I un intervalle, u et v deux fonctions définies sur I, la fonction u étant à valeurs strictement positives sur I ($u(x) > 0,\ \forall x \in I$). Par analogie avec ce qui vient dêtre fait, on pose

$$\forall x \in I,\ u(x)^{v(x)} = \exp[v(x) \times \ln u(x)] = \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}.$$

3.3.5 Fonctions hyperboliques

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathrm{shx} & = & \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} & \text{(fonction sinus hyperbolique)} \\ \mathrm{chx} & = & \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} & \text{(fonction cosinus hyperbolique)} \end{array}\right.$$

On vérifie que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2\mathrm{x} = 1 + \mathrm{sh}^2\mathrm{x}}$$

et que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{sh}'\mathrm{x} & = & \mathrm{chx} \\ \mathrm{ch}'\mathrm{x} & = & \mathrm{shx} \end{array}\right.}$$

Chapitre 4

Intégration

4.1 Intégrale définie

4.1.1 Fonction intégrable

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et bornée sur $[a, b]$.

Sommes de Darboux

Considérons une subdvision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Le diamètre de σ est, par définition, la longueur maximale entre deux points x_i consécutifs :

$$\delta(\sigma) = \max_{i \in \{0,1,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$

Dans la suite, la subdivision σ considérée sera toujours choisie de telle façon que $\delta(\sigma) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Remarquons maintenant que la fonction f, qui est supposée bornée sur $[a, b]$, possède une borne inférieure m_i et une borne supérieure M_i sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

On peut ainsi définir les "sommes de Darboux" $s(f, \sigma)$ et $S(f, \sigma)$ associées à f et σ :

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i}_{s(f,\sigma)} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i}_{S(f,\sigma)}.$$

Critère d'intégrabilité

La fonction f est dite intégrable sur $[a, b]$ si $\lim\limits_{\delta(\sigma) \to 0} s(f, \sigma) = \lim\limits_{\delta(\sigma) \to 0} S(f, \sigma) = I_f$.
La limite commune I_f, quand elle existe, de $s(f, \sigma)$ et $S(f, \sigma)$ lorsque $\delta(\sigma)$ tend vers 0, s'appelle "intégrale

de f sur $[a,b]$" ou "somme de f sur $[a,b]$". On la note :

$$I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

Le réels a et b s'appellent respectivement "borne inférieure" et "borne supérieure"de l'intégrale.
Ayant fait le choix de subdivisions σ telles que $\delta(\sigma) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on peut donc écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i \right),$$

et, pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on vérifie que

$$s(f,\sigma) \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f,\sigma).$$

Permutation des bornes inférieure et supérieure

Jusqu'ici, on n'a défini que les intégrales dont la borne inférieure a est plus petite que la borne supérieure b. Pour s'affranchir de cette limitation, on pose simplement :

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Classe de fonctions intégrables

Il n'est pas facile de caractériser complètement l'ensemble de toutes les fonctions intégrables sur $[a,b]$. Néanmoins, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 1
- *Une fonction monotone sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$,*
- *Une fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$.*

4.1.2 Propriétés de l'intégrale

Interprétation géométrique

Il découle directement de la définition de l'intégrale de f sur $[a,b]$ que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique [1] de la portion de plan située entre la courbe $y = f(x)$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.
La propriété d'additivité des aires permet alors d'écrire la "relation de Chasles" :

$$\boxed{\forall c \in [a,b], \ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

1. Par "aire algébrique" il faut comprendre que l'intégrale de f sur $[a,b]$ peut être négative si l'aire géométrique (toujours comptée positivement) de la portion de plan située en dessous de $y = 0$ est supérieure à celle de la portion de plan située au dessus de $y = 0$.

Conséquence : intégration d'une fonction discontinue. Supposons que f soit continue en tout point de $[a,b]$ sauf en le point $c \in]a,b[$ en lequel elle possède une limite à gauche et une limite à droite finies.
On peut donc prolonger la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a,c]$, $f_{|[a,c]}$, en une fonction continue sur $[a,c]$ en posant $f_{|[a,c]}(c) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$. La fonction ainsi prolongée est continue, donc intégrable sur $[a,c]$.
De même, la restriction de la fonction f à l'intervalle $[c,b]$, $f_{|[c,b]}$, se prolonge en une fonction continue sur $[c,b]$ en posant $f_{|[c,b]}(c) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$. La fonction ainsi prolongée est continue, donc intégrable sur $[c,b]$.
On définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ en posant :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)dx + \int_c^b f_{|[c,b]}(x)dx.$$

Avec cette définition, on voit notamment que la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la valeur de $f(c)$ mais de $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ seulement.

Linéarité de l'intégrale

En revenant à la définition de l'intégrale, on montre facilement que

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \ \lambda \in \mathbb{R}\end{array}}$$

pour toutes fonctions intégrables f et g.

Signe de l'intégrale

Supposons que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. On a donc $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \geq 0$ pour toute subdivision $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$. Par suite, $s(f,\sigma) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{>0}\underbrace{m_i}_{\geq 0} \geq 0$, donc, comme $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq s(f,\sigma)$, on en déduit :

$$\boxed{(\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0}$$

Conséquences.

Comparaison : $\boxed{(\forall x \in [a,b],\ f(x) \leq g(x)) \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\right)}$

Pour le voir, il suffit d'appliquer l'implication précédente à la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ puis d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Valeur absolue : $\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx}$

En effet, pour tout $x \in [a,b]$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, donc, en intégrant cette double inégalité entre a et b, il vient, compte tenu du résultat précédent,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

ce qui démontre bien le résultat.

Attention : même si la fonction f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, l'hypothèse "$f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$" n'assure pas, en général, que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. En effet, la fonction positive sur $[-1,1]$ suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1]\backslash\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$ bien que $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 0$. Dans ce contre-exemple, on remarque que la fonction considérée n'est pas continue en $x = 0$.
Par contre, avec une hypothèse de continuité, on assure l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ n'est pas identiquement nulle sur } [a,b] \\ \forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0 \\ f \text{ est continue sur [a,b]} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\int_a^b f(x)dx > 0\right).$$

En effet, si f est positive et n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Choisissons maintenant $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$. La fonction f est continue en $x = c$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \cap [c-\alpha, c+\alpha],\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Quitte à remplacer $c - \alpha$ par a ou $c + \alpha$ par b, supposons que $a \leq c - \alpha$ et $c + \alpha \leq b$. On a ainsi, pour tout $x \in [c-\alpha, c+\alpha] \subset [a,b]$,

$$f(x) = f(c) + (f(x) - f(c)) \geq f(c) - \underbrace{|f(x) - f(c)|}_{<\frac{f(c)}{2}} > \frac{f(c)}{2} > 0.$$

Ainsi,

$$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx \geq \underbrace{\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \frac{f(c)}{2}dx}_{\alpha f(c)} > 0.$$

Par ailleurs, comme

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{c-\alpha} f(x)dx}_{\geq 0} + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{c+\alpha}^b f(x)dx}_{\geq 0},$$

on voit bien que

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx > 0.$$

Formule de la moyenne

THÉORÈME 2 – *Si f est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Démonstration. Comme f est continue sur $[a,b]$, la fonction f possède, en vertu du théorème 6 du chapitre “Limites et continuité”, une borne inférieure m ainsi qu'une borne supérieure M sur $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M.$$

En intégrant cette double inégalité entre a et b, il vient alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

soit, en divisant par $\frac{1}{b-a} > 0$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Or, f étant continue sur $[a,b]$, le théorème précédemment cité garantit que tout point $\mu \in [m,M]$ est l'image d'au moins un $x \in [a,b]$. Par suite, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \ \blacksquare$$

4.1.3 Primitive

Définition

La fonction f étant toujours supposée intégrable sur $[a,b]$, on appelle “primitive de f sur $[a,b]$” toute fonction F dérivable vérifiant

$$\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x).$$

Si f possède une primitive F_0 sur $[a,b]$, alors, pour tout réel C, il est clair que la fonction $F(x) = F_0(x)+C$ est également une primitive de f sur $[a,b]$. Réciproquement, toute primitive F de f sur $[a,b]$ satisfaisant $(F-F_0)'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $x \mapsto (F-F_0)(x)$ est constante sur $[a,b]$, donc

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = F_0(x) + (\underbrace{F(a) - F_0(a)}_{C}).$$

Ceci montre que toutes les primitives de f sur $[a,b]$ se déduisent de F_0 par l'addition d'une constante.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit $x \in [a,b]$. La fonction f, intégrable sur $[a,b]$, est a fortiori intégrable sur l'intervalle $[a,x]$. Cela permet de définir la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

THÉORÈME 3 – *La fonction φ est continue sur $[a,b]$.*
Lorsque f est de plus continue sur $[a,b]$, φ est dérivable sur $[a,b]$, et :

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi'(x) = f(x).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, la relation de Chasles montre que

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

La fonction f étant supposée bornée sur $[a,b]$, posons $M_1 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. On a donc

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \left|\int_{x_0}^x |f(t)|dt\right| \leq M_1|x - x_0| \overset{x\to x_0}{\to} 0.$$

Par suite, on a montré que $\varphi(x) \overset{x\to x_0}{\to} \varphi(x_0)$ et donc que $x \mapsto \varphi(x)$ est continue en x_0.
Si f est de plus continue sur $[a,b]$, et donc sur $[x_0,x]$, la formule de la moyenne s'applique sur l'intervalle $[x_0,x]$: il existe $c_x \in [x_0,x]$ tel que

$$\frac{1}{x - x_0} \underbrace{\int_{x_0}^x f(t)dt}_{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = f(c_x).$$

Faisons tendre maintenant x vers x_0. Comme c_x appartient à $[x_0,x]$, on voit que $c_x \to x_0$ et que $f(c_x) \to f(x_0)$ car f est continue en x_0. L'égalité précédente implique donc :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c_x) = f(x_0),$$

ce qui montre que φ est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f(x_0)$. ∎

Cas d'une fonction continue

Le théorème 3 assure en fait que toute fonction continue possède des primitives, à savoir $F_C : x \mapsto \varphi(x) + C$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, F étant une primitive de f sur $[a,b]$, il existe un réel C tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\varphi(x)} + C.$$

Comme $\varphi(a) = 0$, on a en fait $C = F(a)$. En prenant ensuite $x = b$, il vient finalement

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

ce qui montre que le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ se ramène ici à celui d'une primitive F de la fonction f.

4.2 Calcul d'intégrales finies

4.2.1 Calcul à l'aide de primitives

L'existence de primitives $x \mapsto F(x) + C$ sur $[a, b]$ de la fonction f permet de ramener le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ à celui de $F(b) - F(a)$. Il est donc utile de dresser la liste des primitives (quand elles existent) des principales fonctions usuelles.

$\displaystyle\int x^\alpha dx$	$=$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1$	$\displaystyle\int \frac{dx}{x}$	$=$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\displaystyle\int \sin x dx$	$=$	$-\cos x + C$	$\displaystyle\int \cos x dx$	$=$	$\sin x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$=$	$-\dfrac{1}{\tan x} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$=$	$\tan x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$=$	$\arcsin x + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}$	$=$	$\arctan x + C$
$\displaystyle\int a^x dx$	$=$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$	$\displaystyle\int \ln x dx$	$=$	$x \ln x - x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$=$	$-\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$=$	$\ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right) + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$	$=$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert\right) + C$	$\displaystyle\int \mathrm{chx\ dx}$	$=$	$\mathrm{shx + C}$

4.2.2 Méthodes générales

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$.
Le produit $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est donc dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Comme toutes les fonctions de cette égalité sont continues sur $[a,b]$, on peut l'intégrer entre a et b :

$$\underbrace{\int_a^b (uv)'(x)dx}_{u(b)v(b)-u(a)v(a)} = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx,$$

ce qui s'écrit également :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

Cette formule, très utile, est connue sous le nom de "formule d'intégration par parties".

Changement de variables

Soient f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et φ une fonction de classe C^1 de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$ (ce qui signifie que φ est une surjection de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$, c'est-à-dire que tout réel $x \in [a,b]$ possède -au moins- un antécédent $t \in [\alpha,\beta]$ vérifiant $x = \varphi(t)$) telle que

$$\begin{cases} a = \varphi(\alpha), \\ b = \varphi(\beta). \end{cases}$$

Dans le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ on considère que la variable d'intégration x est une fonction de la nouvelle variable t en "posant" $x = \varphi(t)$, ce qui est cohérent car, vu les hypothèses faites sur la fonction φ, x décrit bien l'intervalle d'intégration $[a,b]$ lorsque t décrit $[\alpha,\beta]$. On a donc formellement :

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \varphi'(t)dt,$$

ce qui implique la "formule de changement de variable" :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

4.2.3 Une méthode naturelle : la linéarisation

L'intégrale étant linéaire, on peut parfois ramener le calcul d'une intégrale donnée à celui de la somme d'intégrales plus simples à exprimer.

Exemples.

Intégration des polynômes. Si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ pour $a_0, a_1, \ldots, a_n$ appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \underbrace{\int_a^b x^i dx}_{\frac{1}{i+1}[x^{i+1}]_a^b} .$$

Intégration de $\sin^2 x$. On utilise la formule de linéarisation $\sin^2 x = \frac{\cos(2x)-1}{2}$, de sorte que

$$\int_a^b \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\int_a^b \cos(2x)dx}_{\frac{1}{2}[\sin(2x)]_a^b} - \underbrace{\int_a^b dx}_{[x]_a^b}\right\}.$$

4.2.4 Intégration des fractions rationnelles

Une fois la fraction rationnelle $R(x)$ décomposée en éléments simples, le calcul de $\displaystyle\int_a^b R(x)dx$ se ramène à celui de primitives du type

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{x+a}{[(x-\alpha)^2+\omega^2]^m}dx,\ \omega > 0.$$

Pour les pôles de première espèce, le problème est réglé car :

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} + C & \text{si } m \neq 1 \\ \\ \ln|x-\alpha| + C & \text{si } m = 1, \end{cases}$$

Pour les pôles de seconde espèce, il est commode de faire le changement de variable $x - \alpha = \omega t$, de sorte que

$$\int \frac{x+a}{[(x-\alpha)^2+\omega^2]^m}dx = \frac{1}{\omega^{2m-1}}\int \frac{tdt}{(t^2+1)^m} + \frac{\alpha - a}{\omega^{2m}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^m}.$$

Pour la première intégrale de cette somme, on a :

$$\int \underbrace{\frac{tdt}{(t^2+1)^m}}_{\frac{1}{2}\frac{d(1+t^2)}{(t^2+1)^m}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+t^2)^{-m+1}}{-m+1} + C & \text{si } m \neq 1 \\ \\ \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + C & \text{si } m = 1, \end{cases}$$

et pour la seconde, il convient d'effectuer le changement de variable $t = \tan\varphi$ (car cela entraîne $dt = (1+\tan^2\varphi)d\varphi$) :

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^m} = \int \frac{d\varphi}{(1+\tan^2\varphi)^{m-1}} = \int \cos^{2(m-1)}\varphi d\varphi,$$

ce dernier calcul s'effectuant en linéarisant la quantité $\cos^{2(m-1)}\varphi$, comme cela a été vu au §4.2.3.

4.2.5 Intégration de fractions rationnelles des fonctions circulaires

Il s'agit ici d'intégrer les fonctions du type $R(\sin x, \cos x)$ où R est une "fraction rationnelle de deux variables".

La méthode consiste à effectuer le changement de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),\ x \in]-\pi, +\pi[.$$

En effet, on a alors

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

et d'autre part

$$x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

ce qui donne

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \underbrace{R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}_{\text{fraction rationnelle en } t} dt.$$

Cependant cette méthode a l'inconvénient de conduire parfois à des calculs très lourds. Dans certains cas particuliers, on peut utiliser un changement de variable plus adapté :
- $\displaystyle\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(\cos x)d(\cos x)$, on pose $t = \cos x$,
- $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(\sin x)d(\sin x)$, on pose $t = \sin x$,
- $\displaystyle\int R(\tan x)dx$, on pose $t = \tan x$.

4.3 Extension de la notion d'intégrale

On a envisagé jusqu'ici le cas de fonctions bornées, intégrables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Nous allons maintenant essayer d'étendre la notion d'intégrale au cas où :
- f n'est plus bornée sur $[a, b]$,
- l'intervalle d'intégration n'est pas borné.

4.3.1 Intégration d'une fonction non bornée

Définition et exemple fondamental

Définition. On considère une fonction f continue sur $[a, b[$ et telle que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Pour tout $x \in [a, b[$, $t \mapsto f(t)$ est continue donc intégrable sur $[a, x]$, ce qui permet de définir

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

Si cette fonction possède une limite lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente, et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemple fondamental. Etudions le cas particulier où $f(t) = \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{(b-t)^{\alpha-1}}\right]_a^x = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [-\ln|b-t|]_a^x = -\ln(b-x) + \ln(b-a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

- Cas où $\alpha \neq 1$.
  Comme $\lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$ l'intégrale est convergente lorsque $\alpha < 1$ et divergente lorsque $\alpha > 1$. De plus, si $\alpha < 1$, on a

$$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

- Cas où $\alpha = 1$.
  Comme $\lim\limits_{x \to b-} \ln(b-x) = -\infty$, l'intégrale est divergente.

On retiendra donc :

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt \text{ est convergente} \iff \alpha < 1}$$

Cas des fonctions positives

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$, telle que $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

Règle de comparaison. D'après le théorème 3, la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est positive et croissante sur $[a, b[$ (car elle y est dérivable, de dérivée $\varphi'(x) = f(x) \geq 0$). Il est donc intuitivement clair que φ possède une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures si et seulement si elle est majorée sur $[a, b[$:

$$\left(\int_a^b f(t)dt \text{ est convergente}\right) \iff \left(x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée sur } [a, b[\right)$$

Conséquences. Soit g une fonction majorant f sur $[a, b[$. Alors, si g est intégrable sur tout sous-intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$, on a bien sûr :

$$\forall x \in [a, b[,\ 0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Ainsi :
- si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$,
- si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ est divergente.

Règle de l'équivalent. La fonction g étant supposée intégrable sur tout sous-intervalle $[a,x]$ pour $x \in [a,b[$, on déduit de ce qui précède la règle suivante :

$$\boxed{\left(f \overset{b}{\sim} g\right) \Longleftrightarrow \left(\int_a^b f(t)dt \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ sont de même nature}\right)}$$

Application : si $f \overset{b}{\sim} \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ alors

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\alpha < 1$,
- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente si $\alpha \geq 1$.

Cas des fonctions de signe quelconque

On se ramène en fait au cas des fonctions positives au moyen du théorème (admis) suivant :

THÉORÈME 4 – *Si* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ *est convergente alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est convergente.*

Une fonction f dont l'intégrale de la valeur absolue, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$, est convergente est dite “absolument convergente”. On résume donc le théorème 4 par l'implication :

$$\text{absolument convergente} \Longrightarrow \text{convergente.}$$

La réciproque est (bien sûr) fausse.

4.3.2 Intégration sur $[a, +\infty[$

Définition et exemple fondamental

Définition. On considère ici une fonction f continue sur $[a,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,b[$, $t \mapsto f(t)$ est à nouveau continue donc intégrable sur $[a,x]$, ce qui permet encore de définir

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

Si cette fonction possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

Exemple fondamental. Prenons $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le réel a appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ (afin d'éliminer les éventuels problèmes d'intégration en $t = 0$).
Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_a^x = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln|t|]_a^x = \ln x - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

– Cas où $\alpha \neq 1$.
  Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$ l'intégrale est divergente lorsque $\alpha < 1$ et convergente lorsque $\alpha > 1$. De plus, si $\alpha > 1$, on a

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

– Cas où $\alpha = 1$.
  Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, l'intégrale est divergente.

On retiendra donc :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ est convergente} \Longleftrightarrow \alpha > 1}$$

Cas des fonctions positives

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$.

Règle de comparaison. D'après le théorème 3, la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est positive et croissante sur $[a, +\infty[$ (car elle est dérivable sur $[a, +\infty[$, de dérivée $f(x) \geq 0$). Il est donc intuitivement clair que φ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si elle est majorée sur $[a, +\infty[$:

$$\left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right) \Longleftrightarrow \left(x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée sur } [a, +\infty[\right)$$

Conséquences. Soit g une fonction majorant f sur $[a, +\infty[$. Alors, si g est intégrable sur tout sous-intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, +\infty[$, on a bien sûr :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \ 0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Ainsi :
– si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$,
– si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est divergente.

Règle de l'équivalent. La fonction g étant supposée intégrable sur tout sous-intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, +\infty[$, on déduit de ce qui précède la règle suivante :

$$\boxed{\left(f \overset{+\infty}{\sim} g\right) \Longleftrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ sont de même nature}\right)}$$

Application : si $f \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ alors

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si $\alpha > 1$,
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente si $\alpha \leq 1$.

Cas des fonctions de signe quelconque

On se ramène encore au cas des fonctions positives au moyen du théorème (admis) suivant :

THÉORÈME 5 – *Si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ *est convergente alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente.*

Une fonction f dont l'intégrale de la valeur absolue, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$, est convergente est dite "absolument convergente" sur $[a, +\infty[$.

Chapitre 5

Développements limités

On a vu dans le cours sur les limites que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \varepsilon(x) = \dfrac{\cos x - (1-\frac{1}{2}x^2)}{x^2} \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Par suite, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \underbrace{1 - \frac{1}{2}x^2}_{\text{polynôme}} + x^2\varepsilon(x),\ \text{avec } \varepsilon(x) \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Pour x assez petit, disons $|x| < 10^{-3}$ pour fixer les idées, le deuxième terme du polynôme, $\frac{1}{2}x^2$, est inférieur à 10^{-6}, ce qui signifie qu'il est un million de fois plus petit que le premier terme de ce polynôme, qui vaut 1. Quant à la partie restante, $x^2\varepsilon(x)$, elle est négligeable devant x^2 car $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, donc devant $1 - \frac{1}{2}x^2$.
Mais peut-on aller plus loin ? En clair, est-il possible de calculer la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (1-\frac{1}{2}x^2)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\varepsilon(x)}{x}$$

lorsque x tend vers 0, ce qui constitue *a priori* une indétermination "$\frac{0}{0}$" ?

5.1 Généralités

5.1.1 Définition

Soient f une fonction définie sur un voisinage V de 0 (c'est-à-dire sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert centré en 0, $]-\alpha, \alpha[$, $\alpha > 0$) et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de* 0 (que l'on notera $\mathrm{DL}_n(0)$ en abrégé) s'il existe un polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que :

$$\forall x \in V,\ f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x),\ \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Le polynôme P_n est appelé *partie régulière* du $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction f et $x^n\varepsilon(x)$ en est le *terme complémentaire*.

Proposition 1 (unicité) – *Si f admet un $DL_n(0)$ ($n \in \mathbb{N}$), il est unique.*

Cette proposition (admise) signifie en fait :

$$\left.\begin{array}{rcll} f(x) & = & P_n(x)+x^n\varepsilon(x) & \text{avec } P_n\in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0 \\ & = & Q_n(x)+x^n\eta(x) & \text{avec } Q_n\in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } \lim\limits_{x\to 0}\eta(x)=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (P_n=Q_n \text{ et } \varepsilon=\eta)\,.$$

5.1.2 Premières propriétés

Dérivabilité

PROPOSITION 2 – *Si f admet un $DL_n(0)$ $(n\geq 1)$ alors f est dérivable en 0.*

Démonstration. Comme f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, il existe $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x\in V,\ f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

Évidemment, $a_0=f(0)$ et $T_f(0,x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a_1+a_2x+\ldots+a_nx^{n-1}+x^{n-1}\varepsilon(x)\overset{x\to 0}{\longrightarrow} a_1$, ce qui démontre le résultat. ■

Parité

PROPOSITION 3 – *La partie régulière du $DL_n(0)$ de f est paire si la fonction f est paire et impaire si la fonction f est impaire.*

Démonstration. Supposons que la fonction f soit paire, le cas où elle est impaire se traitant de façon analogue. On sait qu'il existe $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x\in V,\ f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0 \tag{5.1}$$

Comme $]-\alpha,\alpha[\subset V$ pour un certain $\alpha>0$, cette égalité est valable pour tout $x\in]-\alpha,\alpha[$. Or, pour chaque $x\in]-\alpha,\alpha[$ on a $-x\in]-\alpha,\alpha[$, donc :

$$f(-x)=P_n(-x)+x^n(-1)^n\varepsilon(-x) \tag{5.2}$$

Mais f étant paire on a $f(x)=f(-x)$ pour tout $x\in]-\alpha,\alpha[$, donc (5.1) et (5.2) sont deux $\mathrm{DL}_n(0)$ de la même fonction f. Par unicité du $\mathrm{DL}_n(0)$, on a finalement :

$$\forall x\in]-\alpha,\alpha[,\ P_n(x)=P_n(-x),$$

ce qui démontre bien que P_n est pair. ■

Troncature

PROPOSITION 3 – *Si f admet un $DL_n(0)$ pour $n\geq 1$, alors elle admet un $DL_p(0)$ pour tout entier $p<n$.*

Démonstration. Comme f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, il existe $n+1$ réels $a_0,a_1,\ldots,a_n$ ainsi qu'une fonction $x\mapsto\varepsilon(x)$ tendant vers 0 lorsque x tend vers 0, tels que

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$$

pour tout x appartenant à un voisinage V de 0.
On a ainsi pour tout entier $p < n$,

$$\forall x \in V,\ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + x^p \left(\underbrace{a_{p+1} x + \ldots + a_n x^{n-p} + x^{n-p} \varepsilon(x)}_{\eta(x)} \right).$$

Comme $\lim_{x \to 0} \eta(x) = 0$, cela montre bien que f possède un $\mathrm{DL}_p(0)$. ■

La démonstration précédente montre que la partie régulière du $\mathrm{DL}_p(0)$ de f est obtenue en ne conservant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à p dans la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f. C'est pourquoi, on dit que le $\mathrm{DL}_p(0)$ de f est obtenu par *troncature* du $\mathrm{DL}_n(0)$ de f.

5.2 Calcul pratique de développements limités

5.2.1 Développement limité des fonctions usuelles

Rappel

Leur calcul est basé sur la formule de Taylor-Young, déjà vue dans le chapitre “Dérivation”, et qui s'énonce comme suit :

THÉORÈME 1 – *Soit f une fonction définie sur un voisinage V de 0 telle que $f^{(n)}(0)$ ($n \geq 1$) existe. Alors, il existe une fonction ε satisfaisant $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ et telle que*

$$\forall x \in V,\ f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Ce théorème montre que toute fonction f possèdant une dérivée à l'ordre n en 0 admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme $f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Applications

Cas de la fonction exponentielle. La fonction exp est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en 0. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$ donc $\exp^{(n)}(0) = 1$. La formule de Taylor-Young indique donc que exp possède un développement limité à tous les ordres $n \in \mathbb{N}$ en 0. Plus précisément, il existe une fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Cas de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. La fonction $f(x) = \ln(1+x)$ est définie sur $V =]-1, +\infty[$ et pour tout entier naturel n, on vérifie que

$$\begin{array}{rcc} f(x) = \ln(1+x) & \Longrightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = (1+x)^{-1} & \Longrightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -(1+x)^{-2} & \Longrightarrow & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = 2(1+x)^{-3} & \Longrightarrow & f'''(0) = 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} & \Longrightarrow & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{array}$$

Il existe donc, en vertu de la formule de Taylor-Young, une fonction ε définie sur $]-1, +\infty[$ et satisfaisant $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ telle que

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + x^n \varepsilon(x).$$

Formulaire

On détermine ainsi les développements limités au voisinage de 0 des fonctions usuelles suivantes :

$$
\begin{array}{ccl}
\mathrm{e}^x & = & 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + \ldots \dfrac{1}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \\[2ex]
\ln(1+x) & = & x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + x^n\varepsilon(x) \\[2ex]
\ln(1-x) & = & -x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - \ldots - \dfrac{1}{n}x^n + x^n\varepsilon(x) \\[2ex]
\sin x & = & x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\[2ex]
\cos x & = & 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\[2ex]
\tan x & = & x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + x^8\varepsilon(x) \\[2ex]
(1+x)^\alpha & = & 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \\[2ex]
(1+x)^{-1} & = & 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \\[2ex]
(1-x)^{-1} & = & 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n\varepsilon(x) \\[2ex]
\arcsin x & = & x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \ldots + \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times (2n)}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\[2ex]
\arctan x & = & x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\[2ex]
\mathrm{shx} & = & x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{120}x^5 + \ldots + \dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+2}\varepsilon(x) \\[2ex]
\mathrm{chx} & = & 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{24}x^4 + \ldots + \dfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n+1}\varepsilon(x) \\[2ex]
\mathrm{thx} & = & x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 - \dfrac{17}{315}x^7 + x^8\varepsilon(x)
\end{array}
$$

avec, dans tous les cas :

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

5.2.2 Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage commun V de 0, qui possédent chacune un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x), \quad P_n \in \mathbb{R}_n[X], \quad \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0; \\ g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x), \quad Q_n \in \mathbb{R}_n[X], \quad \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0. \end{cases}$$

Développement limité de $f + g$

Pour tout $x \in V$,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \underbrace{P_n(x) + Q_n(x)}_{\in\mathbb{R}_n[X]} + x_n(\underbrace{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}_{\varepsilon})(x),$$

et l'on a évidemment $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) + \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.
Par suite,

$$\boxed{f + g \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0) \text{ dont la partie régulière est } P_n + Q_n.}$$

Développement limité de $f \times g$

Pour tout $x \in V$,

$$\begin{aligned} (f\times g)(x) = f(x)\times g(x) &= [P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)] \times [Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)] \\ &= P_n(x)\times Q_n(x) + x^n \underbrace{[\varepsilon_1(x)Q_n(x) + \varepsilon_2(x)P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)]}_{\varepsilon_3(x)\overset{x\to 0}{\longrightarrow}0}. \end{aligned}$$

Or, $(P_n \times Q_n)(x) = \underbrace{R_n(x)}_{\in\mathbb{R}_n[X]} + x^{n+1}\underbrace{S(x)}_{\in\mathbb{R}[X]}$, donc

$$(f\times g)(x) = R_n(x) + x^n \underbrace{[xS(x) + \varepsilon_3(x)]}_{\varepsilon(x)\overset{x\to 0}{\longrightarrow}0}.$$

Ceci montre que

$$\boxed{\begin{array}{c} f\times g \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0) \text{ dont la partie régulière est obtenue} \\ \text{en ne gardant que les termes de degrés} \leq n \text{ dans le polynôme produit } P_n \times Q_n. \end{array}}$$

Développement limité de $\frac{f}{g}$

Supposons que $g(0) \neq 0$, c'est-à-dire que $Q_n(0) \neq 0$.
L'identité de division selon les puissances croissantes à l'ordre n de P_n par Q_n fournit deux polynômes q et R tels que :

$$\begin{cases} P_n(x) = Q_n(x)q(x) + x^{n+1}R(x); \\ \deg(q) \leq n. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x \in V$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \overbrace{Q_n(x)}^{g(x)-x^n\varepsilon_2(x)} \; q(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ &= (g(x) - x^n\varepsilon_2(x))\, q(x) + x^{n+1}R(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ &= g(x)q(x) + x^n\,[\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)q(x) + xR(x)], \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + x^n \underbrace{\left[\frac{\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)q(x) + xR(x)}{g(x)}\right]}_{\varepsilon(x) \xrightarrow{x\to 0} 0}.$$

Ce qui montre que :

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{f}{g} \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0) \text{ dont la partie régulière est le quotient à l'ordre } n \\ \text{de la division suivant les puissances croissantes de } P_n \text{ par } Q_n. \end{array}}$$

Développement limité de $g \circ f$

Supposons que $f(0) = 0$, de sorte que g soit définie sur $f(V)$. On admettra le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} f \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0) \\ f(0) = 0 \\ g \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0) \end{array}\right\} \Longrightarrow g \circ f \text{ admet un } \mathrm{DL}_n(0)}$$

Voyons à l'aide de l'exemple suivant comment on obtient ce développement limité.

Exemple : calcul du $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1 + \sin x)$. Il s'agit de calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $g \circ f$ où $f(x) = \sin x$ et $g(y) = \ln(1+y)$. Ces deux fonctions possèdent un $\mathrm{DL}_3(0)$ et $f(0) = 0$ donc $x \mapsto \ln(1+\sin x)$ admet également un $\mathrm{DL}_3(0)$.
Pour le calculer, on part des développements limités à l'ordre 3 en 0 de chacune des fonctions f et g :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\eta(x), & \lim\limits_{x\to 0} \eta(x) = 0; \\ \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + y^3\gamma(y), & \lim\limits_{y\to 0} \gamma(y) = 0. \end{array} \right.$$

Maintenant, on remplace la variable y par l'expression $x - \frac{x^3}{6}$ dans la partie régulière du $\mathrm{DL}_3(0)$ de $y \mapsto \ln(1+y)$, de façon à former le polynôme $Q_3(x - \frac{x^3}{6})$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sin x) &= \underbrace{x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}_{Q_3(x-\frac{x^3}{6})} + x^3\varepsilon_1(x) \\
&= \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)x^3}_{\text{termes de degrés } \leq 3 \text{ de } Q_3(x - \frac{x^3}{6})} \quad + \quad x^3\varepsilon_1(x) \quad + \quad \underbrace{x^4 S(x)}_{\text{termes de degrés } \geq 4 \text{ de } Q_3(x - \frac{x^3}{6})} \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \underbrace{[\varepsilon_1(x) + xS(x)]}_{\varepsilon(x) \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}.
\end{aligned}$$

5.3 Quelques applications des développements limités

5.3.1 Développement limité d'une fonction au voisinage de l'infini

Voyons sur un exemple comment obtenir le développement limité d'une fonction donnée au voisinage de l'infini (et non plus au voisinage de 0 comme c'était le cas jusqu'ici).
Plus précisément, cherchons le développement limité à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. Pour cela, il suffit de remarquer que $y = \frac{1}{x}$ appartient à un voisinage de 0 lorsque x est dans un voisinage de $\pm\infty$. Par suite,

$$\mathrm{e}^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^n}{n!} + y^n\varepsilon(y), \text{ avec } \lim_{y\to 0} \varepsilon(y) = 0,$$

soit

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \text{ avec } \lim_{x\to\pm\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

5.3.2 Etude locale d'une fonction au voisinage de 0

Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

définie pour tout $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
Comme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

on a

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x),$$

avec toujours $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.
Ceci prouve que la courbe représentative de f

– passe par le point $M_0 = (0, -\frac{1}{2})$;
– que la tangente à cette courbe en M_0 a pour équation "$y = -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$" ;
– que la courbe est située en dessous de cette tangente.

Chapitre 6

Equations différentielles

6.1 Généralités

6.1.1 Notion d'équation différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.
On appelle *équation différentielle d'ordre n* toute relation de la forme

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{6.1}$$

entre la variable x et la fonction $x \mapsto y(x)$ ainsi que ses dérivées $y^{(p)}$, $1 \leq p \leq n$.

Exemple. Si l'on considère l'équation différentielle

$$\ln x \times y' + \frac{1}{x} y = 0, \tag{6.2}$$

on est en présence d'une équation d'ordre 1, puisqu'elle se met sous la forme équivalente $F(x, y, y') = 0$, où :

$$F \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \ln x_1 \times x_3 + \frac{x_2}{x_1}. \end{array} \right.$$

6.1.2 Solution d'une équation différentielle

On appelle *solution de l'équation différentielle (6.1)* toute fonction $x \mapsto \varphi(x)$ définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \varphi \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ (ii) & \forall x \in I,\ (x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega \\ (ii) & \forall x \in I,\ F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right] = 0. \end{array}$$

Exemple. Reprenons l'équation (6.2) et remarquons qu'elle s'écrit simplement

$$\ln x y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = (\ln x \times y(x))' = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(y \text{ est solution de } (6.2)) &\iff (\ln x \times y(x) = C,\ C \in \mathbb{R}) \\ &\iff \left(y(x) = \frac{C}{\ln x},\ C \in \mathbb{R}\right)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (6.2) est donc formé des fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{C_1}{\ln x} & \text{si } x \in]0,1[\\ \frac{C_2}{\ln x} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, ainsi que de la restriction de la fonction nulle à $\mathbb{R}_+^*$ (cas où $C = 0$).
Soient maintenant $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- si $x_0 \neq 1$, il existe une seule solution y de (6.2) telle que $y(x_0) = y_0$. C'est la fonction

$$x \mapsto \frac{y_0 \ln x_0}{\ln x} \quad (C = y_0 \ln x_0);$$

- si $x_0 = 1$, il y a deux possibilités :
  - si $y_0 \neq 0$, il n'existe pas de solution y de (6.2) telle que $y(x_0) = y_0$;
  - si $y_0 = 0$, la seule solution y de (6.2) vérifiant $y(x_0) = y_0$ est la fonction identiquement nulle.

6.2 Equations différentielles du premier ordre

Ce sont des équations différentielles du type

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.3}$$

liant la variable x à y et à sa dérivée première, où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Parfois, (6.3) peut se mettre sous la forme $y' = f(x, y)$ avec $f : \omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dans ce cas particulier, l'équation différentielle est dite *résolue en y'*.

6.2.1 Equations différentielles linéaires

Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{6.4}$$

dans laquelle a, b et c sont des fonctions continues sur un sous-ensemble commun I de $\mathbb{R}$.
L'équation différentielle

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{6.5}$$

est appelée *équation sans second membre (essm) associée à (6.4).*

Structure de l'ensemble des solutions de (6.4)

Soit S' l'ensemble des solutions de (6.5) :

$$S' = \{y : J \subset I \to \mathbb{R}, \text{dérivable et t.q. } a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \ \forall x \in J\}.$$

Notons ensuite $\tilde{y}$ une solution particulière de (6.4).

Théorème 6.2.1 *L'ensemble des solutions S de (6.4) est :*

$$S = \{\tilde{y} + y, \ y \in S'\}$$

Preuve
Comme $\tilde{y}$ est solution de (6.4), il existe un sous-ensemble $\tilde{J}$ de I tel que

$$\forall x \in \tilde{J}, \ a(x)\tilde{y}'(x) + b(x)\tilde{y}(x) = c(x). \tag{6.6}$$

Commençons par montrer que $\{\tilde{y} + y, \ y \in S'\} \subset S$, c'est-à-dire que pour chaque solution y de (6.5), $y + \tilde{y}$ est solution de (6.4). Si y est solution de (6.5), on peut trouver un sous-ensemble J de I tel que

$$\forall x \in J, \ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \tag{6.7}$$

Par suite, $\tilde{y}$ et y sont notamment définies sur le sous-ensemble $J_1 = \tilde{J} \cap J$ de I, et, en faisant la somme de (6.6) et (6.7), on obtient pour chaque $x \in J_1$:

$$a(x)[\tilde{y} + y]'(x) + b(x)[\tilde{y} + y](x) = c(x),$$

ce qui montre que $\tilde{y} + y \in S$.
Reste donc à prouver l'inclusion inverse, $S \subset \{\tilde{y}+y, \ y \in S'\}$, ce qui revient à montrer pour chaque solution y_1 de (6.4), que $y_1 - \tilde{y}$ est solution de (6.5). Ceci est évident car s'il existe un sous-ensemble J_1 de I tel que

$$\forall x \in J_1, \ a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) = c(x),$$

alors, en soustrayant (6.6) à cette égalité pour tout $x \in J_1 \cap \tilde{J}$, il vient

$$\forall x \in J_1 \cap \tilde{J}, \ a(x)[y_1 - \tilde{y}]'(x) + b(x)[y_1 - \tilde{y}](x) = 0,$$

ce qui montre bien que $y_1 - \tilde{y}$ est solution de (6.5). ■

Résolution de (6.5)

Théorème 6.2.2 *Si la fonction a ne s'annule pas sur I, alors :*

$$S' = \{x \mapsto \lambda y_1(x), \ \lambda \in \mathbb{R}\} \textit{ avec } y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}, \ \forall x \in I.$$

Preuve
Comme a ne s'annule pas sur I, pour chaque x appartenant à un sous-ensemble de I, on a évidemment

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0 \Longleftrightarrow \underbrace{y'(x)+\frac{b(x)}{a(x)}y(x)}_{\mathrm{e}^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\times\left(y(x)\mathrm{e}^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)'} = 0.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}>0$, cette égalité équivaut simplement à $\left(y(x)\mathrm{e}^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)'=0$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}
(y \text{ est solution de (6.5)}) &\Longleftrightarrow \left(\left(y(x)\mathrm{e}^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)'=0\right)\\
&\Longleftrightarrow \left(\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ y(x)\mathrm{e}^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}=\lambda\right)\\
&\Longleftrightarrow \left(\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ y(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 6.2.1 *Les théorèmes 6.2.1 et 6.2.2 montrent que si l'on connaît une solution particulière* $\tilde{y}$ *de (6.4), alors* $S=\{\tilde{y}+\lambda y_1,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.

Calcul de y_1 : méthode de variation de la constante

L'idée est de rechercher la solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme

$$\tilde{y}(x)=\alpha(x)\times y_1(x),$$

où α est une fonction dérivable sur I à déterminer.
Pour tout $x\in I$, on a donc :

$$\tilde{y}'(x)=\alpha'(x)y_1(x)+\alpha(x)\underbrace{y_1'(x)}_{-\frac{b(x)}{a(x)}y_1(x)},$$

ce qui implique

$$a(x)\tilde{y}'(x)+b(x)\tilde{y}(x)=\alpha'(x)a(x)y_1(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(\tilde{y} \text{ est solution de (6.5)}) &\Longleftrightarrow (\alpha'(x)a(x)y_1(x)=c(x))\\
&\Longleftrightarrow \left(\alpha(x)=\int\frac{c(x)}{a(x)y_1(x)}dx\right),
\end{aligned}$$

car $a(x)y_1(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$.

Conclusion : sous les hypothèses du théorème 6.2.2 (essentiellement $a(x)\neq 0,\ \forall x\in I$), on a :

$$S=\left\{x\mapsto\left(\int\frac{c(x)}{a(x)y_1(x)}dx+\lambda\right)\times y_1(x),\ \lambda\in\mathbb{R},\right\},$$

où $y_1(x)=\mathrm{e}^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}$ pour tout $x\in I$.

Exemple

La fonction $t \mapsto i(t)$ désignant l'intensité du courant électrique circulant (à partir du temps $t = 0$) dans un circuit RL muni d'un générateur sinusoïdal $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} Li'(t) + Ri(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad \text{pour } t \geq 0; \\ i(0) = 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

On résout ce problème pour $t \geq 0$, c'est-à-dire que l'on choisit $I = \mathbb{R}_+$. Il s'agit donc de résoudre l'essm puis de chercher ensuite une solution particulière de l'équation différentielle.
Commençons par résoudre l'essm. On a, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} (Li'(t) + Ri(t) = 0) &\iff \left(i'(t) = -\frac{R}{L} i(t)\right) \\ &\iff \left(i(t) = \lambda e^{-\frac{R}{L}t},\ \lambda \in \mathbb{R}\right). \end{aligned}$$

Par suite, nous prendrons $i_1(t) = e^{-\frac{R}{L}t}$ de sorte que $S' = \{t \mapsto \lambda i_1(t),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Cherchons maintenant une solution particulière $\tilde{\imath}$ de cette équation différentielle. Pour cela, on applique la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche $\tilde{\imath}$ sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \tilde{\imath}(t) = \alpha(t) i_1(t),$$

où α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à déterminer. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a ainsi

$$\tilde{\imath}'(t) = \alpha'(t) i_1(t) + \alpha(t) \underbrace{i_1'(t)}_{\frac{-R}{L} i_1(t)} = \alpha'(t) i_1(t) - \frac{R}{L} \underbrace{\alpha(t) i_1(t)}_{\tilde{\imath}(t)},$$

donc

$$\tilde{\imath}'(t) + \frac{R}{L}\tilde{\imath}(t) = \alpha'(t) i_1(t) = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t),$$

ce qui entraîne

$$\alpha'(t) = \frac{E_0}{L} \underbrace{e^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega t)}_{\mathrm{Re}\left(e^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}\right)},$$

et donne finalement :

$$\alpha(t) = \frac{E_0}{L} \mathrm{Re}\left(\int e^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}\right).$$

Comme une primitive de $t \mapsto e^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}$ est $t \mapsto \frac{1}{\frac{R}{L} + j\omega} e^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}$ et que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\frac{R}{L} + j\omega} e^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{R}{L} - j\omega}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} e^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}\right) = \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on peut choisir

$$\alpha(t) = \frac{E_0}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right),$$

ce qui, en posant au préalable $\tau = \frac{L}{R}$, donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \tilde{\imath}(t) = \frac{E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}\left[\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right].$$

Les théorèmes 6.2.1 et 6.2.2 assurent alors que l'ensemble des solutions S de l'équation différentielle $Li'(t)+Ri(t) = E_0 \sin(\omega t)$ du système (6.8) s'écrit :

$$S = \{\tilde{y} + \lambda y_1,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{t \mapsto i_\lambda(t) = \frac{E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}\left[\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)\right] + \lambda \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ensuite, l'unique réel λ pour lequel $i_\lambda(0) = 0$ est $\lambda = \frac{-E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}$, donc l'unique solution i de (6.8) est :

$$i(t) = \frac{E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}\left[\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$

6.2.2 Equations à variables séparables

Définition

Une *équation à variables séparables* est une équation différentielle du premier ordre qui se met sous la forme

$$g(y) \times y' = f(x), \tag{6.9}$$

où f et g sont deux fonctions réelles de la variable réelle, qui possèdent toutes deux une primitive.

Résolution

Résoudre l'équation différentielle (6.9) revient à calculer (lorsque cela est possible) une primitive pour chacune des deux fonctions f et g. En effet, on a formellement :

$$\begin{aligned}(g(y) \times y' = f(x)) &\iff \left(\int g(y) \times \underbrace{\frac{dy}{dx} \times dx}_{dy} = \int f(x)dx + C,\ C \in \mathbb{R}\right) \\ &\iff \left(\int g(y)dy = \int f(x)dx + C,\ C \in \mathbb{R}\right).\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}\left(2yy' - y^2\cos x = \cos x\right) &\iff \left(2yy' = (1+y^2)\cos x\right) \\ &\iff \left(\frac{2yy'}{1+y^2} = \cos x\right) \\ &\iff \left(\int \frac{2y}{1+y^2}dy = \int \cos x dx\right) \\ &\iff \left(\ln(1+y^2) = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}\right) \\ &\iff \left(y^2 = -1 + \lambda \mathrm{e}^{\sin x},\ \lambda \in \mathbb{R}_+\right).\end{aligned}$$

6.3 Equations différentielles du second ordre

Ce sont des équations différentielles du type

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{6.10}$$

où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, liant la variable x à y ainsi qu'à ses dérivées première et seconde.

6.3.1 Equation différentielle du second ordre se ramenant au premier ordre

Principe

Toute équation différentielle du second ordre de la forme

$$G(x, y', y'') = 0 \tag{6.11}$$

dans laquelle la quantité y n'apparaît pas, se ramène en fait à une équation différentielle du premier ordre. En effet, si l'on pose $z = y'$, l'équation différentielle (6.11) s'écrit $G(x, z, z') = 0$. On voit ainsi que la fonction $z = y'$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Exemple

$$\begin{aligned}
\Big(y'' + (y')^2 = 0\Big) &\overset{z=y'}{\iff} \Big(z' + z^2 = 0\Big)\\
&\iff \left(\frac{-z'}{z^2} = 1\right)\\
&\iff \left(\left(\frac{1}{z}\right)' = 1\right)\\
&\iff \left(\frac{1}{z} = x - x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}\right)\\
&\iff \left(y' = \frac{1}{x - x_0},\ x_0 \in \mathbb{R}\right)\\
&\iff \Big(y = \ln|x - x_0| + y_0,\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\Big).
\end{aligned}$$

6.3.2 Equation différentielle linéaire du second ordre

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre*, toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{6.12}$$

dans laquelle a, b, c et f sont des fonctions continues sur un sous-ensemble commun I de $\mathbb{R}$.
On associe à (6.12) l'équation sans second-membre (essm)

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0. \tag{6.13}$$

Cas général : structure de l'ensemble des solutions

Par analogie avec les notations employées précédemment, on note S l'ensemble des solutions de (6.12) et S' celui de (6.13).

Théorème 6.3.1 *Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'essm (6.13) vérifiant la condition*

$$\forall x,\ y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0. \tag{6.14}$$

- *On a alors $S' = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$;*
- *Si l'on connaît de plus une solution particulière y_0 de (6.12), alors :*

$$S = \{y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exemples. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + \omega^2 y = x. \tag{6.15}$$

Les fonctions $y_1 : x \mapsto \sin(\omega x)$ et $y_2 : x \mapsto \cos(\omega x)$ sont solutions de l'essm associée à (6.15). Elles vérifient de plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \omega \neq 0.$$

Ensuite, il est facile de voir que $x \mapsto \frac{x}{\omega^2}$ est une solution particulière de (6.15). Le théorème 6.3.1 garantit donc que

$$S = \{x \mapsto \lambda_1 \sin(\omega x) + \lambda_2 \cos(\omega x) + \frac{x}{\omega^2},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Connaissant y_1, solution (non identiquement nulle) de (6.13), comment calculer y_2 qui satisfasse la condition (6.14) ?

La méthode consiste à chercher y_2 sous la forme $y_2(x) = \alpha(x)y_1(x)$, où α est une fonction dérivable à déterminer. On a ainsi pour tout x :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_2'(x) & = & \alpha'(x)y_1(x) + \alpha(x)y_1'(x) \\ y_2''(x) & = & \alpha''(x)y_1(x) + 2\alpha'(x)y_1'(x) + \alpha(x)y_1''(x) \end{array}\right.$$

Or, on veut que y_2 soit solution de (6.13), c'est-à-dire que pour tout x, on ait :

$$a(x)\left[\alpha''(x)y_1(x) + 2\alpha'(x)y_1'(x) + \alpha(x)y_1''(x)\right] + b(x)\left[\alpha'(x)y_1(x) + \alpha(x)y_1'(x)\right] + c(x)\alpha(x)y_1(x) = 0,$$

soit :

$$\underbrace{a(x)y_1(x)\alpha''(x) + \left[2a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x)\right]\alpha'(x)}_{\substack{\text{équation différentielle en } \alpha \text{ que l'on résout} \\ \text{suivant la méthode de la section 6.3.1}}} + \underbrace{\left[a(x)y_1''(x) + b(x)y_1'(x) + c(x)y_1(x)\right]}_{0}\alpha(x) = 0.$$

Exemple. On considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + xy' - y = 0. \tag{6.16}$$

Elle possède une solution évidente $y_1(x) = x$. On cherche donc y_2 sous la forme

$$y_2(x) = \alpha(x)y_1(x) = x\alpha(x).$$

On obtient alors

$$x^2y_2''(x) + xy_2'(x) - y_2(x) = \left[3\alpha'(x) + x\alpha''(x)\right]x^2 = 0,$$

ce qui implique $3\alpha'(x) + x\alpha''(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Or, quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
(3\alpha'(x) + x\alpha''(x) = 0) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\alpha''(x)}{\alpha'(x)} = -\frac{3}{x}\right)\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\ln\left|\frac{\alpha'(x)}{C}\right| = -3\ln|x|,\ C \in \mathbb{R}\right)\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\alpha'(x) = \frac{C}{x^3},\ C \in \mathbb{R}\right)\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\alpha(x) = \alpha_0 + \frac{\lambda}{x^2},\ (\alpha_0, \lambda) \in \mathbb{R}^2\right).
\end{aligned}$$

Comme on cherche une solution y_2 de (6.16), on peut choisir $\alpha_0 = 0$ et $\lambda = 1$ par exemple, de sorte que $y_2(x) = \frac{1}{x}$. En vertu du théorème 6.3.1, l'ensemble des solutions de (6.16) est :

$$S = \{\lambda_1 x + \frac{\lambda_2}{x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\lambda_2 \neq 0$.

Calcul d'une solution particulière de (6.12) : méthode de variation des constantes.
Pour appliquer cette méthode, on suppose que :

- l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de (6.13) définies sur $I \subset \mathbb{R}$, qui vérifient la condition (6.14) ;
- la fonction $x \mapsto a(x)$ ne s'annule pas sur I.

On cherche alors une solution particulière y_0 de (6.12) sous la forme

$$y_0(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x),$$

où α_1 et α_2 sont deux fonctions dérivables sur I à déterminer. Comme y_0 vérifie (6.12), cela fournit une relation entre les deux inconnues α_1, α_2 et leurs dérivées. Il est donc nécessaire d'en imposer une seconde :

$$\forall x \in I,\ \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{6.17}$$

Compte tenu de (6.17), on a pour tout $x \in I$:

$$\left\{\begin{array}{lcl}
y_0'(x) & = & \alpha_1(x)y_1'(x) + \alpha_2(x)y_2'(x)\\
y_0''(x) & = & \alpha_1(x)y_1''(x) + \alpha_2(x)y_2''(x) + \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x).
\end{array}\right.$$

Or y_0 est solution de (6.12) sur I, donc pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) \underbrace{\left[\alpha_1(x)y_1''(x) + \alpha_2(x)y_2''(x) + \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x)\right]}_{y_0''(x)} \\ &+ b(x) \underbrace{\left[\alpha_1(x)y_1'(x) + \alpha_2(x)y_2'(x)\right]}_{y_0'(x)} + c(x) \underbrace{\left[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)\right]}_{y_0(x)}, \end{aligned}$$

soit, en tenant compte des relations $a(x)y_i''(x) + b(x)y_i'(x) + c(x)y_i(x) = 0$ pour $i = 1, 2$,

$$a(x) \left[y_1'(x)\alpha_1'(x) + y_2'(x)\alpha_2'(x)\right] = f(x),$$

ce qui donne finalement, puisque a ne s'annule pas sur I :

$$\forall x \in I, \ y_1'(x)\alpha_1'(x) + y_2'(x)\alpha_2'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}. \tag{6.18}$$

Le système formé par les équations (6.17) et (6.18),

$$\forall x \in I, \begin{cases} \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) = 0 \\ y_1'(x)\alpha_1'(x) + y_2'(x)\alpha_2'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}, \end{cases}$$

permet alors d'obtenir α_1' et α_2'. En effet, en multipliant (6.17) par $y_2'(x)$ et (6.18) par $y_2(x)$ et en soustrayant cette seconde équation à la première, il vient :

$$\forall x \in I, \ \left[y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)\right] \alpha_1'(x) = y_2(x)\frac{f(x)}{a(x)}.$$

Comme on a supposé $y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) \neq 0$ pour chaque $x \in I$, cela montre que

$$\forall x \in I, \ \alpha_1'(x) = \frac{y_2(x)}{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)} \times \frac{f(x)}{a(x)}.$$

De même, en multipliant (6.17) par $y_1'(x)$ et (6.18) par $y_1(x)$ et en soustrayant la seconde égalité obtenue à la première, on a :

$$\forall x \in I, \ \alpha_2'(x) = -\frac{y_1(x)}{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)} \times \frac{f(x)}{a(x)}.$$

Les fonctions α_1 et α_2 s'obtiennent ensuite par intégration de ces expressions. Evidemment, chacune d'entre-elles est déterminée à une constante additive près.

Exemple. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = \tan x. \tag{6.19}$$

L'essm associée à (6.19) possède deux solutions évidentes $y_1(x) = \sin x$ et $y_2(x) = \cos x$ définies sur $I = \mathbb{R}$, qui satisfont la condition (6.14) sur cet intervalle. Ici, $a(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc a ne s'annule pas sur I. On peut donc appliquer la méthode de variation des constantes en cherchant une solution particulière y_0 de (6.19) sous la forme

$$y_0(x) = \alpha_1(x)\sin x + \alpha_2(x)\cos x, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

où α_1 et α_2 sont deux fonctions dérivables auxquelles on impose de vérifier

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1'(x)\sin x + \alpha_2'(x)\cos x = 0. \tag{6.20}$$

Cette condition entraîne pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $y_0'(x) = \alpha_1(x)\cos x - \alpha_2(x)\sin x$ et $y_0''(x) = \alpha_1'(x)\cos x - \alpha_2'(x)\sin x - \alpha_1(x)\sin x - \alpha_2(x)\cos x$. Par suite, comme y_0 est solution de (6.19), un calcul simple montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \alpha_1'(x)\cos x - \alpha_2'(x)\sin x = \tan x.$$

Compte tenu de (6.20), α_1' et α_2' sont déterminées par le système :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1'(x)\sin x + \alpha_2'(x)\cos x & = & 0 \\ \alpha_1'(x)\cos x - \alpha_2'(x)\sin x & = & \tan x. \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1'(x) & = & \sin x \\ \alpha_2'(x) & = & -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}, \end{array}\right.$$

et donc, par intégration de ces deux égalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_1(x) & = & -\cos x + C_1 \\ \alpha_2(x) & = & \sin x - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2, \end{array}\right.$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles arbitrairement fixées. En choisissant $C_1 = C_2 = 0$ par exemple, une solution particulière de (6.19) est $x \mapsto -\cos x \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$. Le théorème 6.3.1 garantit alors que l'ensemble des solutions de (6.19) est :

$$S = \left\{x \mapsto -\cos x \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{6.21}$$

où f est une fonction et a, b, c sont des constantes réelles.
On associe à (6.21) l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{6.22}$$

Résolution de l'essm (6.22).
On cherche les solutions de (6.22) sous la forme

$$y = \mathrm{e}^{rx} \text{ où } r \in \mathbb{C}.$$

On a donc $y'(x) = ry(x)$ et $y''(x) = r^2 y(x)$ et

$$\begin{array}{rcl} (y \text{ est solution de } (6.22)) & \Longleftrightarrow & \left((ar^2 + br + c)\underbrace{y(x)}_{\neq 0} = 0\right) \\ & \Longleftrightarrow & \left(ar^2 + br + c = 0\right). \end{array}$$

L'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{6.23}$$

s'appelle *équation caractéristique associée à (6.22)*. On peut maintenant distinguer deux cas :

– 1er cas : l'équation caractéristique (6.23) possède deux racines distinctes r_1 et r_2.

Si l'on pose $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$, on vérifie alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, que :

$$y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\neq 0}\underbrace{\mathrm{e}^{(r_1+r_2)x}}_{\neq 0} \neq 0.$$

Par suite, le théorème 6.3.1 assure que

$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

Remarque 6.3.1 *Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & \alpha + j\omega \\ r_2 & = & \alpha - j\omega. \end{array}\right.$$

La solution $x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$ est a priori une fonction de la variable réelle x à valeurs complexes. Mais, dans certains problèmes, on ne s'intéresse qu'aux solutions à valeurs réelles de (6.22). Comme les quantités $\mathrm{e}^{r_1 x}$ et $\mathrm{e}^{r_2 x}$ sont complexes conjuguées pour tout réel x, il suffit en fait de choisir $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \overline{\lambda_1}\mathrm{e}^{r_2 x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\underbrace{\left(\lambda_1 \mathrm{e}^{j\omega x} + \overline{\lambda_1}\mathrm{e}^{-j\omega x}\right)}_{2\mathrm{Re}(\lambda_1 \mathrm{e}^{j\omega x})}.$$

Si l'on convient que $\lambda_1 = \lambda_0 + j\mu_0$ pour $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$, on a alors $\mathrm{Re}\left(\lambda_1 \mathrm{e}^{j\omega x}\right) = \lambda_0 \cos(\omega x) - \mu_0 \sin(\omega x)$, soit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))\,\mathrm{e}^{\alpha x},$$

où l'on a posé $\lambda = 2\lambda_0$ et $\mu = -2\mu_0$.

– 2ème cas : l'équation caractéristique (6.23) possède une racine double $r_0 = \frac{-b}{2a}$.

On ne dispose *a priori* dans ce cas que d'une seule solution de (6.22) : $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_0 x}$. L'idée est de chercher y_2 sous la forme $y_2(x) = \alpha(x)y_1(x)$ où α est une fonction dérivable à déterminer. On obtient alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_2'(x) & = & (\alpha'(x) + r_0\alpha(x))y_1(x) \\ y_2''(x) & = & (\alpha''(x) + 2r_0\alpha'(x) + r_0^2\alpha(x))y_1(x)), \end{array}\right.$$

de sorte que

$$\begin{aligned} (y_2 \text{ est solution de (6.22)}) \quad & \iff \quad \left(\left[a(\alpha''(x) + 2r_0\alpha'(x) + r_0^2\alpha(x)) + b(\alpha'(x) + r_0\alpha(x)) + c\alpha(x)\right]\underbrace{y_1(x)}_{\neq 0} = 0\right) \\ & \iff \quad \left(\underbrace{(ar_0^2 + br_0 + c)}_{=0}\alpha(x) + \underbrace{(2ar_0 + b)}_{=0}\alpha'(x) + a\alpha''(x) = 0\right) \\ & \iff \quad (\alpha''(x) = 0)\,. \end{aligned}$$

Par suite, α est un polynôme de degré ≤ 1 :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(x) = \lambda x + \mu.$$

On a donc $y_2(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{r_0 x}$. Si l'on choisit $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :

$$y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = (r_0 x - (1 + r_0 x))\,\mathrm{e}^{2r_0 x} = -\mathrm{e}^{2r_0 x} \neq 0,$$

donc le théorème 6.3.1 permet d'écrire :

$$S' = \left\{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{r_0 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Résumé. Pour résoudre (6.22) on commence par calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique (6.23) :

- si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et :

$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\};$$

- si $\Delta = 0$, on a une solution réelle double $r_0 = \frac{-b}{2a}$, et :

$$S' = \left\{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{r_0 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\};$$

- si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm j\omega$, et :

$$S' = \left\{x \mapsto [\lambda_1 \cos(\omega x) + \lambda_2 \sin(\omega x)]\,\mathrm{e}^{\alpha x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemples : L'équation linéaire du second ordre à coefficients constants

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$. Celle-ci possède deux racines réelles distinctes : -1 et -2. Par suite :

$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. $y'' + 2y' + y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$. Cette dernière ayant -1 pour racine double, on en déduit :

$$S' = \left\{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3. $y'' + 2y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$. Cette équation possède deux racines complexes conjuguées : $-1 \pm j$, ce qui entraîne :

$$S' = \left\{x \mapsto (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Résolution de l'équation complète (6.21).
On vient de voir comment résoudre l'essm (6.22), ce qui fournit

$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour résoudre l'équation complète (6.21), il suffit, en vertu du théorème 6.3.1, de calculer une solution particulière $\tilde{y}$ de (6.21). Pour cela, on peut appliquer la méthode de variation des constantes. Mais cette méthode a l'inconvénient de donner des calculs assez lourds. Une autre méthode consiste à chercher directement l'expression de $\tilde{y}$. Cette recherche est facile lorsque f prend certaines formes particulières. Nous allons maintenant détailler deux de ces cas particuliers.

- <u>1er cas : $f(x) = P_n(x)$ où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$.</u>
  La méthode consiste à chercher $\tilde{y}$ sous la forme d'un polynôme
  - de degré n, si $c \neq 0$;
  - de degré $n+1$, si $c = 0$ et $b \neq 0$;
  - de degré $n+2$, si $c = b = 0$.

  Exemple. On considère l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants

  $$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 8x + 4.$$

  Comme les coefficients c et b de cette équation sont tous deux non nuls, on cherche une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme d'un polynôme de degré 2 :

  $$\tilde{y}(x) = ux^2 + vx + w,\ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

  On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

  $$\underbrace{\tilde{y}''(x)}_{2u} + 3\,\underbrace{\tilde{y}'(x)}_{2ux+v} + 2\,\underbrace{\tilde{y}(x)}_{ux^2+vx+w} = 2x^2 + 8x + 4,$$

  soit, en regroupant suivant les puissances décroissantes de x :

  $$2ux^2 + (6u + 2v)x + 2u + 3v + 2w = 2x^2 + 8x + 4,$$

  ce qui implique

  $$\left\{\begin{array}{lllllll} 2u & & & & & = & 2 \\ 6u & + & 2v & & & = & 8 \\ 2u & + & 3v & + & 2w & = & 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} u & = & 1 \\ v & = & 1 \\ w & = & -\frac{1}{2}, \end{array}\right.$$

  et donc

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{y}(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}.$$

  Comme on a vu dans l'exemple précédent que

  $$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

  on déduit de ce qui précède :

  $$S = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-2x} + x^2 + x - \frac{1}{2},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

– $\underline{2^{\text{ème}}\text{ cas : } f(x) = \mathrm{e}^{zx}P_n(x) \text{ où } z \in \mathbb{C} \text{ et } P_n \in \mathbb{R}_n[X],\ n \in \mathbb{N}.}$
On cherche ici une solution particulière de (6.21) de la forme $\tilde{y}(x) = \alpha(x)\mathrm{e}^{zx}$ où α est une fonction deux fois dérivable à déterminer. On a ainsi

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{y}'(x) & = & (z\alpha(x) + \alpha'(x))\mathrm{e}^{zx} \\ \tilde{y}''(x) & = & (\alpha''(x) + 2z\alpha'(x) + z^2\alpha(x))\mathrm{e}^{zx}, \end{array}\right.$$

de sorte que,

$$\begin{aligned} (\tilde{y} \text{ est solution de (6.21)}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\Big[a\alpha''(x) + (2az+b)\alpha'(x) + (az^2+bz+c)\alpha(x)\Big]\underbrace{\mathrm{e}^{zx}}_{\neq 0} = P_n(x)\mathrm{e}^{zx}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big(a\alpha''(x) + (2az+b)\alpha'(x) + (az^2+bz+c)\alpha(x) = P_n(x)\Big). \end{aligned}$$

On est ainsi ramené au cas précédent. On cherchera donc α sous la forme d'un polynôme
– de degré n, si $az^2+bz+c \neq 0$, c'est-à-dire si z n'est pas racine de l'équation caractéristique (6.23) ;
– de degré $n+1$, si $az^2+bz+c = 0$ et $2az+b \neq 0$, c'est-à-dire si z est racine simple de l'équation caractéristique (6.23) ;
– de degré $n+2$, si $az^2+bz+c = 0$ et $2az+b = 0$, c'est-à-dire si z est racine double de l'équation caractéristique (6.23).

Exemple. On considère maintenant l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' - y = 2x\mathrm{e}^x.$$

Ici, $z = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$. On cherche une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme $\mathrm{e}^x\alpha(x)$ où α est un polynôme de degré $1+1=2$:

$$\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^x(ux^2 + vx + w),\ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Le polynôme α doit donc vérifier pour chaque $x \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\alpha''(x)}_{2u} + 2\underbrace{\alpha'(x)}_{2ux+v} = 2x,$$

soit, en regroupant suivant les puissances décroissantes de x :

$$2ux + u + v = x,$$

ce qui entraîne

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2u & & & = & 1 \\ u & + & v & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} u & = & \frac{1}{2} \\ v & = & -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

On remarque ainsi que le réel w n'est pas déterminé par les conditions choisies : il est donc quelconque. Comme on cherche une solution particulière, on peut faire le choix de prendre $w = 0$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{y}(x) = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right).$$

Comme l'essm $y'' - y = 0$ a pour ensemble solution

$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2 \mathrm{e}^{-x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

on en déduit finalement :

$$S = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^x + \lambda_2 \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$