Université d'Aix-Marseille
Institut Universitaire de Technologie
Génie des Télécommunications et Réseaux

Travaux dirigés de mathématiques pour la théorie du signal

1. **Suites numériques**
2. **Séries de Fourier**
3. **Transformation de Fourier**
4. **Transformation de Laplace**

1 Suites et séries numériques

1.1 Exercices

1.1.1

Soient $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Tracer le graphe de $x \mapsto \frac{1+x^2}{2}$ en précisant notamment sa position par rapport à la première bissectrice. Etudier ensuite graphiquement le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Supposons $|u_0| \leq 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et convergente dont on calculera la limite.

c) Soit maintenant $|u_0| > 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante. En déduire que $u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Indication : raisonner par l'absurde en supposant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

1.1.2

Soit $u_n = \frac{1}{n(n-1)}$ pour tout $n \geq 2$.

a) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$ pour tout $n \geq 2$.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ converge et calculer sa limite.

c) En déduire que la suite $T_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ est convergente et donner un majorant de sa limite, notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

1.1.3

Etudier la convergence des suites suivantes :

$$\textbf{a)} \left(n \sin\left(\frac{a}{n}\right)\right)_{n\geq 1} \quad \textbf{b)} \left(n^3 \left[\tan\left(\frac{a}{n}\right) - \sin\left(\frac{a}{n}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right)_{n\geq 1} \quad \textbf{c)} \left(n^2 \ln\left|\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right|\right)_{n\geq 1}.$$

1.1.4

Etudier les suites récurrentes suivantes :

$$\textbf{a)} \begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} \end{cases} \quad \textbf{b)} \begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \end{cases} \quad \textbf{c)} \begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1}. \end{cases}$$

1.1.5

Soit $v_0 = 0$ et $v_{n+1} = \frac{6}{5+v_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer les points fixes de $f(x) = \frac{6}{5+x}$ et étudier graphiquement le comportement de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Prouver que si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite ne peut être que l'un des deux réels a et b que l'on déterminera (on prendra $a > b$).

c) Soit $w_n = \frac{v_n - a}{v_n - b}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c1) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

c2) En déduire l'expression de w_n en fonction de n puis étudier la convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Etudier enfin la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en précisant sa limite éventuelle.

2 Séries de Fourier

2.1 Exercices traités en TD

2.1.1

Soit $T > 0$. Développer en série de Fourier la fonction T-périodique (signal carré) :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-T/2, 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = T/2 \\ 1 & \text{si } x \in]0, T/2[. \end{cases}$$

Quelle est la valeur de la somme de la série de Fourier de f en $x = 0$?

2.1.2

Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par $g(x) = x$ si $x \in]-\pi, \pi]$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

2.1.3

En intégrant le développement en série de Fourier du signal carré, développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie par :

$$h(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \in]-\pi, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

2.1.4

Développer en série de Fourier la fonction T-périodique définie par

$$h(x) = |x| \text{ si } x \in [-T/2, T/2].$$

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2.1.5

Développer en série de Fourier la fonction $F(x) = \begin{cases} \pi - x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ \pi + x & \text{si } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$

En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2.2 Exercices supplémentaires

2.2.1

Développer en série de Fourier la fonction $G(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \pi - x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ -\pi + x & \text{si } x \in [-\pi, 0]. \end{array} \right.$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2.2.2

Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, on a à la fois :

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} \text{ et } x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

.

2.2.3

Développer en série de Fourier la fonction 2-périodique G définie par $H(x) = x^2$ si $x \in [0, 2]$.
Montrer que les termes de ce développement se mettent sous la forme $u_n(x) = A_n \cos(n\omega x - \varphi_n)$.
Etudier les variations de A_n en fonction de n.

2.2.4

Calculer les coefficients de Fourier complexes de $i(t) = I|\sin(\omega t)|$.
Appliquer l'égalité de Parseval et préciser le nombre de termes nécessaires pour obtenir $\frac{90}{100}$ de l'intensité efficace.

3 Transformation de Fourier

3.1 Exercices traités en TD

3.1.1

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$.

a) Calculer la transformée de Fourier de f.

b) En déduire que $\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\lambda^2}\right)(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$.

c) Calculer alors la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}dx$ pour tout $w \in \mathbb{R}$.

3.1.2

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$.

a) Après avoir rappelé l'expression de la transformée de Fourier de f, justifier son existence. Calculer ensuite la transformée de Fourier de f.

b) En déduire que $\mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\lambda^2}\right)(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$. Puis que $\mathcal{F}\left(x \mapsto \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}\right)(\lambda) = \mathrm{e}^{-a|\lambda|}$.

c) Calculer alors la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}dx$ pour tout $w \in \mathbb{R}$.

3.1.3

Soient $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ et $g(x) = xf(x)$. On note F et G les transformées de Fourier de chacune de ces fonctions.

a) En dérivant formellement F, montrer que $F'(\lambda) = -j2\pi G(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Vérifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ que l'on a $f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 \quad (E)$. Que devient (E) lorsqu'on lui applique $\mathcal{F}$?

c) Montrer à l'aide de **a)** et de **b)**, que F est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

d) En admettant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}dx = 1$, déduire de **c)** l'expression de $F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(\omega x)dx$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

3.1.4

Soient $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ et $g(x) = xf(x)$. On note F et G les transformées de Fourier de chacune de ces fonctions.

a) En dérivant formellement F, montrer que $F'(\lambda) = -j2\pi G(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Vérifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ que l'on a $f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 \quad (E)$. Que devient (E) lorsqu'on lui applique $\mathcal{F}$?

c) Montrer à l'aide de **a)** et de **b)**, que F est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

d) En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2} dx = 1$, déduire de **c)** l'expression de $F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) Calculer $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(\omega x) dx$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

3.1.5

Soient $f : x \longmapsto f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ et $g : x \longmapsto g(x) = x f(x)$.

a) Que dire de la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\ dx$?

Justifier votre réponse.

b) Sachant que $\int_{1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x}\ dx$ converge, montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\ dx.$$

Justifier votre réponse.

c) En déduire l'existence des transformées de Fourier des fonctions f et g, notées respectivement F et G.

d) Vérifier pour tout $x \in \mathbb{R}$ que l'on a $f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 \quad (E)$. Que devient (E) lorsqu'on lui applique $\mathcal{F}$, la transformation de Fourier ?

e) En vous rappelant que $\mathcal{F}[f'](\lambda) = 2\pi\lambda j F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et en supposant que $F'(\lambda) = -j2\pi G(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, en déduire à l'aide de **d)**, que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on précisera.

f) Déduire de **e)**, l'expression de $F(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

g) Calculer $\int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(\omega x) dx$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.

3.2 Exercices supplémentaires

3.2.1

a) Montrer que la transformée de Fourier F de $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$ vérifie :

$$\forall \lambda \neq 0,\ F(\lambda) = \frac{1}{(\pi\lambda)^2}\left[\frac{\sin(2\pi\lambda)}{2\pi\lambda} - \cos(2\pi\lambda)\right].$$

b) En calculant un DL_3 en 0 de $\lambda \mapsto \sin(2\pi\lambda) - 2\pi\lambda\cos(2\pi\lambda)$, donner la valeur de $\lim\limits_{\lambda \to 0} F(\lambda)$.

c) Vérifier alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(0)$.

3.2.2

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$ et on note P la fonction "porte".

a) Calculer la transformée de Fourier G de g

b) Exprimer G en fonction de $\mathcal{F}(P)$. En déduire ensuite que $g = P * P$.

4 Transformation de Laplace

4.1 Exercices traités en TD

Ex. A. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{si } x \in [(n-1)a, na[\text{ pour tout } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

a) Exprimer f au moyen de la fonction “échelon unité” $\mathcal{U}$ définie en cours.
b) En déduire l'image de f.

Ex. B. Calculer les images des fonctions suivantes :

a)$(x^2-1)^2\mathcal{U}(x)$	**b)**$(\sin(2x) - 3\cos(2x))\mathcal{U}(x)$	**c)**$\mathrm{e}^{-x}\cos(3x)\mathcal{U}(x)$
d) $\sin(\omega x)\cos(\omega x)\mathcal{U}(x)$	**e)** $\sin(x)^2\mathcal{U}(x)$	**f)**$\mathrm{sh}(\omega \mathrm{x})\mathcal{U}(\mathrm{x})$.

Ex. C. Calculer les images de $x\sin(\omega x)\mathcal{U}(x)$ et $x\cos(\omega x)\mathcal{U}(x)$ en utilisant :
a) les exponentielles complexes
b) les dérivées des images de $\sin(\omega x)\mathcal{U}(x)$ et $\cos(\omega x)\mathcal{U}(x)$.

Ex. D. Calculer les images de $\dfrac{\sin(x)}{x}\mathcal{U}(x)$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathcal{U}(x)$, $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$.

Ex. E. Calculer l'image de la fonction 2π-périodique $x \mapsto f(x)\mathcal{U}(x)$, où f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Ex. F. Trouver les originaux de $\dfrac{1}{p^2-3}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{p-1}$.

4.2 Exercices supplémentaires

Ex. A. Soit $F(p) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{p^2}\right)$.
a) Calculer la dérivée de F.
b) En déduire l'original de F.

Ex. B. En utilisant le produit de convolution, calculer l'original de $\dfrac{1}{(p+a)^2}$.

Ex. C. Soit y la solution du système différentiel (S) $\left\{\begin{array}{l} y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x\mathrm{e}^x\mathcal{U}(x) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{array}\right.$

On note Y son image.

a) Montrer que Y est une fraction rationnelle que l'on décomposera en éléments simples.

b) En déduire y.

c) Retrouver ce résultat en appliquant la méthode de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.