Université d'Aix-Marseille
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux & Télécommunications

Travaux dirigés d'analyse

1 Limites

1.1 Exercices traités en TD

1.1.1

Représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1$. Calculer sa limite en 0.

1.1.2

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{x}{3-x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \; g(x)$.

1.1.3

Soit la fonction h définie par $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{R}^{-*} \end{cases}$. Que dire de sa limite en 0 ?

1.1.4

Soit $f(x) = xE(x)$ [1]. Calculer $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} n} f(x)$ et $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} n} f(x)$ pour tout entier relatif n.
Représenter alors la fonction f.

1.1.5

La fonction $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet-elle une limite en 0 ?
Même question pour $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1.1.6

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2+6x-7}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$ **h)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ **i)** $\lim\limits_{|x|\to +\infty} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{2x^2+6x-7}$ **k)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^2+6}{-3x^2+3x-1}$ **l)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5-3x^3+2x^2-1}{x^2+6x-7}$ **m)** $\lim\limits_{|x|\to +\infty} \dfrac{(x-1)^5}{x^3(-3x^2+6x)-7}$

1.1.7

Donner un équivalent en $x = 0$ des fonctions suivantes :

a) $\sqrt{a+x}-\sqrt{a}$, $a > 0$ **b)** $\dfrac{4}{2+x}-2+x$ **c)** $\tan x$ **d)** $\cos x - 1$ **e)** $\sqrt{1+x}-1-\dfrac{x}{2}$ **f)** $\tan x - \sin x$.

[1] On rappelle que la notation E désigne la fonction partie entière.

1.2 Exercices supplémentaires

1.2.1

Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Montrer que $|f(x)| \leq \dfrac{|x|}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

1.2.2

Calculer les limites suivantes : **a**) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$ **b**) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

2 Continuité, fonctions réciproques

2.1 Exercices traités en TD

2.1.1

Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, et que la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2.1.2

Soient $f, g : A \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. Montrer que :

a) $\left.\begin{array}{c} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ n'est pas continue en } x_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f+g \text{ n'est pas continue en } x_0.$

b) $\left.\begin{array}{c} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ n'est pas continue en } x_0 \end{array}\right\} \not\Longrightarrow fg \text{ n'est pas continue en } x_0.$

2.1.3

Etudier la continuité en $x = 0$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x + \sqrt{x^2}$; **b**) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **c**) $h(x) = xE(x)$ **d**) $i(x) = \begin{cases} x - \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2.1.4

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en 0 :

a) $f(x) = \dfrac{1 - \cos(\sqrt{|x|})}{|x|}$ **b**) $g(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **c**) $h(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **d**) $k(x) = \cos x \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2.1.5

La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2.1.6

La fonction $g(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x+3}}{x-1}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

2.1.7

Montrer que $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.1.8

Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une seule racine réelle.
La calculer par dichotomie à 10^{-1} près.

2.1.9

Soit $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Montrer que f définit une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +1[$. Définir f^{-1}.

2.1.10

Soient f et g deux fonctions continues et strictement monotones sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $[a, b]$.
On pose $h = f \circ g$. Montrer que h possède une réciproque et que $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
Appliquer ce résultat à $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ et $g(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [0, 1]$.

2.2 Exercices supplémentaires

2.2.1

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

a) A partir de l'égalité évidente $x = x_0 + (x - x_0)$, calculer $\sin x$ en fonction de $\sin(x - x_0)$, $\cos(x - x_0)$, $\sin x_0$ et $\cos x_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer ensuite(en utilisant simplement la continuité des fonctions sinus et cosinus en 0) que $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \right)$ à l'aide des égalités $\lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{\sin y}{y} \right) = 1$ et $\lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{\cos y - 1}{y} \right) = 0$.

2.2.2

Soit f une fonction numérique de la variable réelle définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $[a, b]$. On suppose que pour tout x_1 et x_2 de $[a, b]$,

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|.$$

a) Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $[a, b]$.

2.2.3

La fonction $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

2.2.4

La fonction $g(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue en 0 ?

2.2.5

Montrer qu'il existe f et g non continues en x_0 telles que $f + g$ est continue en x_0.
Que peut-on dire de fg ?

2.2.6

La fonction $g(x) = \dfrac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2}$ est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

2.2.7

Montrer que l'équation $x^4 - 4x^2 - x + 1 = 0$ admet quatre racines réelles.
Les calculer par dichotomie à 10^{-3} près. (Tabuler le polynôme sur [-5,5])

3 Dérivation

3.1 Exercices traités en TD

3.1.1

Démontrer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ que :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3.1.2

En calculant préalablement leurs dérivées, simplifier les expressions suivantes :

$$\textbf{a)}\ \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \qquad \textbf{b)}\ \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3.1.3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier la continuité de la dérivée première f' de f en 0.

3.1.4

Démontrer pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que $\dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

3.1.5

Utiliser la notion de dérivée pour calculer $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arctan x - \pi/4}{x-1}$.
Qu'en est-il de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\sqrt{x}\right)}{x}$? Qu'en est-il de $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\cos 2 - \cos\left(\sqrt{x}\right)}{4-x}$?

3.1.6

Trouver une expression simplifiée des dérivées de

$$\textbf{a)}\ \alpha(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \textbf{b)}\ \beta(x) = \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right).$$

3.2 Exercices supplémentaires

3.2.1

Etudier les variations et tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$\textbf{a)}\ f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1} \qquad \textbf{b)}\ g(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

3.2.2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\textbf{a)}\quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \qquad \textbf{b)}\quad g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad \textbf{c)}\quad h(x) = x\sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$\textbf{d)}\quad i(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \qquad \textbf{e)}\quad j(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)} \qquad \textbf{f)}\quad k(x) = \sin x + \frac{1}{\cos x}$$

3.2.3

Démontrer pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ que $\dfrac{x}{1 + x^2} \leq \arctan x \leq x$.

3.2.4

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$.

On dit que f est convexe sur $[a, b]$ si, pour tous x et x' dans $[a, b]$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f\left[\lambda x + (1 - \lambda)x'\right] \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x').$$

a) Montrer que si f est convexe sur $[a, b]$, elle vérifie, pour tous $x_i \in [a, b]$:

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\right) \leq \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_3 f(x_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}.$$

b) On admet qu'une fonction f deux fois dérivable sur $[a, b]$ est convexe sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\forall x \in [a, b],\ \ f''(x) > 0.$$

Montrer que l'on peut appliquer l'inégalité démontrée au **a**) à $f(x) = x^2$. En déduire ensuite l'inégalité de Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{3} b_i\right).$$

4 Fonctions exponentielle, logarithme et hyperboliques

4.1 Exercices traités en TD

4.1.1

Etudier $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et $h(x) = \ln|\ln(x)|$.

4.1.2

Résoudre $\ln(x^2 - 1) = 2\ln(2x - 1) - \ln(4)$.

4.1.3

Calculer, en utilisant la formule des accroissements finis, les limites suivantes :

$$\textbf{a)} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \textbf{b)} \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

En déduire un équivalent polynômial de $x \mapsto \ln(1+x)$ et de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0.

4.1.4

Calculer les limites suivantes : **a)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$ **b)** $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^x$ **c)** $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$.

4.1.5

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

4.1.6

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction logarithme, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \dfrac{1}{n}$. En déduire une majoration de $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.

4.2 Exercices supplémentaires

4.2.1

Etudier $f(x) = x\ln(x)$.

4.2.2

Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que $\begin{cases} \mathrm{sh(x+y) = shx\ chy + chx\ shy} \\ \mathrm{ch(x+y) = chx\ chy + shx\ shy}. \end{cases}$

En déduire les expressions de $\mathrm{sh(x-y)}$ et de $\mathrm{ch(x-y)}$.

5 Intégration

5.1 Exercices traités en TD

5.1.1

Calculer $\int \text{thxdx}$ et en déduire $\int \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} dx$.

5.1.2

Calculer $\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)dx$.

5.1.3

Calculer $\int \cos^4 x dx$.

5.1.4

En intégrant plusieurs fois par parties, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.

5.1.5

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Etablir une formule de récurrence entre I_n et I_{n-2} en distinguant les cas où n est pair ou impair.

5.1.6

Calculer $\int \frac{dt}{(t+1)(t^2+1)}$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$.

5.1.7

Montrer que les intégrales $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ convergent.

5.1.8

Etudier la nature (c'est-à-dire la convergence) des intégrales suivantes :

$$\textbf{a)}\ I = \int_0^2 \frac{dx}{x^2(4-x^2)} \qquad \textbf{b)}\ K = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^3} dx \qquad \textbf{c)}\ L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^n x} dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

5.1.9

a) En rappelant l'expression d'une primitive de la fonction logarithme népérien, ln, montrer que $\int_0^1 \ln x dx$ est convergente. En déduire que l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ a un sens.

b) Soit $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$. Montrer que $I = J$.

c) Soit $K = \int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx$. Montrer que $K = I + J$.

d) Démontrer que $I + J = \frac{K}{2} - \frac{\pi}{2} \ln 2$. En déduire alors les valeurs de I, de J et de K.

5.1.10

a) Exprimer $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x} \sin x dx$, $n \in \mathbb{N}$, en fonction de I_0 à l'aide d'un changement de variable.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin x dx$ converge, et donner sa valeur.

5.2 Exercices supplémentaires

5.2.1

Calculer $J = \int_0^{2\pi} \cos(px) \sin(qx) dx$ et $K = \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) dx$.

5.2.2

Calculer $\int \sin^5 x dx$.

5.2.3

En intégrant plusieurs fois par parties, calculer $\int_0^1 x \ln^2 x dx$.

5.2.4

Calculer $\int \frac{dt}{t^2 - 2t - 1}$. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

5.2.5

Etudier la nature (c'est-à-dire la convergence) de l'intégrale $J_\alpha = \int_{-1}^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

5.2.6

Etudier la nature des intégrales suivantes :

a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{x^4 + 1}$ **b)** $J = \int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^3 + 1}}$ **c)** $K = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} dx}{1 + x}$ **d)** $L = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x dx$.

5.2.7

Exemple de calculs de coeff. de Fourier par IPP.

6 Développements limités

6.1 Exercices traités en TD

6.1.1

Calculer le DL_5 en 0 de thx à partir des DL en 0 de shx et chx.

6.1.2

Calculer le DL_3 en 0 des fonctions : **a)** $\mathrm{e}^{\sin x}$ **b)** $\mathrm{e}^{\cos x}$ **c)** $\ln(\cos x)$ **d)** $\sqrt{\cos x}$ **e)** $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

6.1.3

Retouver le DL_n en 0 ($n \in \mathbb{N}^*$) de la fonction arctan à partir de celui de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

6.1.4

Calculer le DL_n ($n \in \mathbb{N}^*$) au voisinage de l'infini $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

6.1.5

Calculer les limites suivantes :

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin x}{x - \sin x} \qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) \qquad \textbf{c)}\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \qquad \textbf{e)}\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin x - \cos x} \qquad \textbf{f)}\ \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\textbf{g)}\ \lim_{x\to 0} (1 - \cos x)^x.$$

6.1.6

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$.

Généraliser le résultat à $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_n)} - x\right)$ pour tout entier $n \geq 2$.

6.1.7

Calculer l'asymptote de la fonction $x \overset{f}{\mapsto} \dfrac{x^2-1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ et préciser sa position par rapport à la courbe représentative de la fonction f.

6.2 Exercices supplémentaires

6.2.1

Calculer DL_2 au voisinage de 1 de la fonction arctan.
En déduire les DL de $\arctan(\mathrm{e}^x)$ en 0 et de $\arctan\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)$ au voisinage de l'infini.

6.2.2

Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\arctan x - x}$ **b**) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$ **c**) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

k) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ **l**) $\displaystyle\lim_{x\to 2}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

6.2.3

Calculer l'asymptote de la fonction $x \overset{g}{\mapsto} \sqrt[3]{x^2(x-1)}$ et préciser sa position par rapport à la courbe représentative de la fonction g.

7 Equations différentielles

7.1 Exercices traités en TD

7.1.1

Intégrer les équations différentielles sans second membre suivantes :

$$\textbf{a)}\quad xy' + (1+x)y = 0 \quad \textbf{b)}\quad y'\sin x = y.$$

7.1.2

Intégrer les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

$$\textbf{a)}\quad 2xy' + y = \tfrac{1}{x} \quad \textbf{b)}\quad y'\cos x + y\sin x = 1 + x.$$

7.1.3

Donner les solutions réelles de l'équation différentielle linéaire $y'' + \omega^2 y = 0$ lorsque $y(0) = y'(0) = 1$.
Même question avec $y(0) = 5$, $y'(0) = -5$ et $y(0) = -3$, $y'(0) = -1$.

7.1.4

Donner les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

$$\textbf{a)}\ y' + 2y = \mathrm{e}^{-x} \quad \textbf{b)}\ y'\cos x - y\sin x = \sin(2x).$$

7.1.5

Montrer que l'équation différentielle $xy' + (x-2)y = x-2$ possède une solution constante que l'on calculera.
En déduire sa solution générale.

7.1.6

Donner les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
\textbf{a}_1) & y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 3 & \textbf{a}_2) & y'' - 4y' = x^2 - 2x & & \\
\textbf{b}_1) & y'' - 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{4x} & \textbf{b}_2) & y'' - 5y' + 6y = 4\mathrm{e}^{2x} & \textbf{b}_3) & y'' - 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{4x} + 4\mathrm{e}^{2x} \\
\textbf{c}_1) & y'' + y = x\mathrm{e}^{2x} & \textbf{c}_2) & y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^{x} & \textbf{c}_3) & y'' + 2y' - 8y = 4(3x+5)\mathrm{e}^{2x}
\end{array}$$

7.2 Exercices supplémentaires

7.2.1

Intégrer les équations différentielles sans second membre suivantes :

$$\textbf{a)}\quad y'\sqrt{1-x^2} + y^2 = 0 \quad \textbf{b)}\quad xy' + 2x - y = 0.$$

7.2.2

Intégrer les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :

$$\textbf{a)}\quad y' + y = x^2 \quad \textbf{b)}\quad xy' - y = \ln x.$$

7.2.3

Donner toutes les solutions réelles des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants suivantes :

$$\textbf{a)}\quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \textbf{c)}\quad y'' - 6y' + 9y = 0.$$

7.2.4

Donner les solutions réelles de l'équation différentielle

$$y' + y\cos x = \cos x.$$