Université d'Aix-Marseille
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications

Notions essentielles d'algèbre linéaire

1. **Espace vectoriel**
2. **Base**
3. **Dimension**
4. **Matrices**
5. **Application linéaire et représentation matricielle**
6. **Inversion matricielle**

Table des matières

Dans tout ce qui suit, K désigne soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit celui des complexes $\mathbb{C}$.

1 Espace vectoriel

1.1 Définition

Un ensemble E non vide et muni :

(a) d'une loi de composition interne appelée $addition$ notée $+$ et d'élément neutre 0_E,

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,x') & \mapsto & x+x', \end{array}$$

(b) d'une loi de composition externe de domaine K, appelé $multiplication\ par\ un\ scalaire$,

$$\begin{array}{ccc} K\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x, \end{array}$$

est un $espace\ vectoriel\ sur\ K$ (noté K-ev ou plus simplement ev lorsqu'il n'y a pas de confusion possible) si ces deux lois vérifient les conditions suivantes :

(i) $(x+x')+x''=x+(x'+x''),\ \forall x,x',x''\in E$

(ii) $x+x'=x'+x,\forall x,x'\in E$

(iii) $x+O_E=x,\ \forall x\in E$

(iv) $x+(-x)=O_E,\ \forall x\in E$

(v) $1.x=x,\ \forall x\in E$

(vi) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x,\ \forall x\in E,\forall\lambda,\mu\in K$

(vii) $\lambda(x+x')=\lambda x+\lambda x',\ \forall x,x'\in E,\forall\lambda\in K$

(viii) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x,\ \forall x\in E,\forall\lambda,\mu\in K.$

Vocabulaire. *Un élément x de E s'appelle un $vecteur$ de E, et un élément λ de K s'appelle un $scalaire$.*

Remarque. *Dans un ev, il n'y a pas de multiplication entre deux vecteurs, mais entre un scalaire et un vecteur seulement. Dans la suite, afin de bien distinguer entre vecteurs et scalaires, tout vecteur $x\in E$ sera noté $\vec{x}$.*

Stabilité. *Pour simplifier, on peut dire qu'un K-ev est un ensemble non vide satisfaisant les deux conditions de $stabilité$ suivantes :*

$$\begin{array}{ll} (EV1) & \forall(\vec{u},\vec{v})\in E\times E,\ \vec{u}+\vec{v}\in E \\ (EV2) & \forall\lambda\in K,\ \forall\vec{u}\in E,\ \lambda\vec{u}\in E. \end{array}$$

De plus il est facile de voir que $(EV1)+(EV2)$ se résume en :

$$\boxed{(EV)\quad \forall(\vec{u},\vec{v})\in E\times E,\ \forall(\lambda,\mu)\in K\times K,\ \lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\in E.}$$

1.2 Exemples

Exemple 1. *On choisit $K=\mathbb{R}$ et $E=\mathbb{R}^2=\left\{\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\right\}$. Par définition, on a :*

– pour tout $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ et tout $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$;

– pour tout tout $\lambda\in\mathbb{R}$ et tout $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\lambda\vec{u}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

On vérifie ainsi que E satisfait (EV) et donc que c'est un $\mathbb{R}$-ev
Ce résultat se généralise immédiatement à $\mathbb{R}^n$ pour tout $n\geq 2$.

Exemple 2. *On choisit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Les vecteurs de E sont donc des polynômes. Autrement dit, $P \in E$ s'il existe $n \geq 0$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

Par définition,

– *pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$ avec $n \leq m$, on a*

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=n+1}^{m} b_k X^k.$$

– *pour tout tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$.*

Il est donc évident que $\mathbb{R}[X]$ satisfait (EV), et donc que c'est un $\mathbb{R}$-ev.

Remarques. *L'ensemble $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) n'est pas un $\mathbb{R}$-ev (ni un $\mathbb{C}$-ev d'ailleurs). En effet, si tel était le cas,*

$$\underbrace{(-1)}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{2}_{\in \mathbb{N}} = -2, \ (\textit{resp.}\ \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{1}_{\in \mathbb{Z}} = \frac{1}{2}, \ \underbrace{\sqrt{2}}_{\in \mathbb{R}} \times \underbrace{1}_{\in \mathbb{Q}} = \sqrt{2})$$

appartiendrait à $\mathbb{N}$,(resp. à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$), ce qui est faux.
Par ailleurs, tout K-e.v E étant un ensemble non vide, choisissons $\vec{u}$ dans E. Comme $0 \in K$ et que E est un K-ev, $0\vec{u} = \vec{0}_E$ appartient à E. Tout ev E contient donc (au moins) le vecteur $\vec{0}_E$, appelé <u>vecteur nul de E</u>, et qu'il ne faut pas confondre le scalaire nul 0. Par exemple, le vecteur nul du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Combinaison linéaire

Soient E un K-ev, I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ (pour simplifier) et $\mathcal{F} = (\vec{f}_i)_{i \in I}$ une famille (éventuellement infinie) de vecteurs de E (pour tout $i \in I$, $\vec{f}_i$ est donc un vecteur de E). On appelle combinaison linéaire (notée CL en abrégé) de vecteurs de $\mathcal{F}$, tout vecteur de E de la forme :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \vec{f}_j, \ \text{où} \ \begin{cases} (i) & J \text{ est un sous-ensemble } \underline{\text{fini}} \text{ de } I; \\ (ii) & \forall j \in J, \ \lambda_j \in K. \end{cases}$$

En clair, une CL de vecteurs de $\mathcal{F} \subset E$ est une somme FINIE de vecteurs du type $\lambda \vec{x}$ avec $\lambda \in K$ et $\vec{x} \in \mathcal{F}$.

Exemple. *On prend $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. On se donne ensuite N dans $\mathbb{N}$, et on pose*

$$\mathcal{F} = \{1, X, X^2, \ldots, X^N\},$$

où, si l'on utilise les notations de la définition : $I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ et $\vec{f}_i = X^i$ pour tout $i \in I$. Une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$ est donc un élément de $\mathbb{R}[X]$ du type

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_N X^N,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_N$ sont des réels (éventuellement nuls). Autrement dit, une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$ est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N. Réciproquement, tout polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N est, par définition, une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Remarque. *Examinons le cas particulier où $\mathcal{F} = E$. La condition (EV) garantit que toute CL de vecteurs de E appartient à E (ce que l'on résume en disant que E est stable par CL) et récriproquement que tout ensemble non vide et stable par CL est un ev :*

$$\boxed{E = \text{ev} \iff E \text{ est un ensemble non vide qui est stable par CL.}}$$

1.4 Sous-espace vectoriel

Soit E un K-ev

1.4.1 Définition

Tout sous-ensemble F non vide de E, qui est stable par CL, c'est-à-dire qui satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $\vec{x} + \vec{x'} \in F,\ \forall \vec{x}, \vec{x'} \in F$

(ii) $\lambda \vec{x} \in F,\ \forall \lambda \in K,\ \forall \vec{x} \in F$

est un $\textit{sous-espace vectoriel}$ (sev en abrégé) de E. C'est donc un K-ev qui est inclus dans E.

Remarque. *Si F est un sev de E alors $\vec{0}_E \in F$. Ainsi, pour prouver que $F \subset E$ est un sev de E, il suffit de vérifier les deux conditions suivantes :*

(a) $\vec{0}_E \in F$

(b) $\lambda \vec{x} + \vec{x'} \in F,\ \forall \lambda \in K,\ \forall \vec{x}, \vec{x'} \in F.$

De plus, le plus petit sev de E (au sens de l'inclusion $\subset$) est l'ensemble $\{\vec{0}_E\}$.

Exemple. *Pour tout $N \geq 0$, $\mathbb{R}_N[X]$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.*

Propriétés.

(a) La réunion de deux sev de E N'EST PAS en général un sev de E.

(b) L'intersection de deux sev de E est un sev de E.

1.4.2 Espace vectoriel engendré par une famille

$\mathcal{F} = (\vec{f_i})_{i \in I}$ (où $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$) désignant à nouveau une famille de vecteurs d'un K-ev E, on note $\operatorname{vect} \mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\boxed{\operatorname{vect} \mathcal{F} = \{\text{CL de vecteurs de } \mathcal{F}\}.}$$

Il est facile de vérifier que c'est un sev de E, appelé $\textit{sev engendré par}$ $\mathcal{F}$.

Exemple. *On reprend le cas de l'exemple précédent : $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{F} = \{1, X, X^2, \ldots, X^N\}$, où N est un entier fixé. D'après ce qui a été vu dans cet exemple,*

$$\operatorname{vect} \mathcal{F} = \mathbb{R}_N[X],$$

ce qui redémontre au passage que $\mathbb{R}_N[X]$ est un sev de $\mathbb{R}[X]$.

1.4.3 Somme de sev

Soient F_1 et F_2 deux sev de E. On vérifie facilement que l'ensemble noté $F_1 + F_2$ et défini comme suit :

$$\boxed{F_1 + F_2 = \{u_1 + u_2,\ u_1 \in F_1,\ u_2 \in F_2\},}$$

est un sev de E. Il est appelé $\textit{somme de}$ F_1 $\textit{et}$ F_2.

Exemple. *Si* $E=\mathbb{R}^3$, $F_1=\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\}$ *où* $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, *et* $F_2=\mathrm{vect}\{\vec{e_2}\}$ *où* $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, *on voit que*

$$F_1+F_2=(0xy).$$

Par ailleurs, on vérifie également que $F_1\cap F_2=\{\vec{0}_E\}$ *et il est bien connu que tout vecteur de* $(Oxy)=F_1+F_2$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $\vec{x_1}+\vec{x_2}$ *avec* $\vec{x_1}\in F_1$ *et* $\vec{x_2}\in F_2$. *En d'autres termes :*

$$\forall\vec{x_1},\vec{x_1'}\in F_1,\ \forall\vec{x_2},\vec{x_2'}\in F_2,\ \vec{x_1}+\vec{x_2}=\vec{x_1'}+\vec{x_2'}\Longrightarrow\vec{x_1}=\vec{x_1'}\ \text{et}\ \vec{x_2}=\vec{x_2'}.$$

Pour $G_1=\mathrm{vect}\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}$ *et* $G_2=\mathrm{vect}\{\vec{e_1}+\vec{e_2}\}$ *on a également* $G_1+G_2=(Oxy)$ *mais on remarque que* $G_1\cap G_2\neq\{\vec{0}_E\}$ *(car* $\vec{e_1}+\vec{e_2}\in G_1\cap G_2$ *par exemple) et qu'il existe au moins deux décompositions distinctes de* $\vec{e_1}$ *dans* G_1+G_2 *:*

$$\vec{e_1}=\underbrace{(-\vec{e_2})+\vec{e_1}}_{\in G_1}+\underbrace{\vec{e_2}}_{\in G_2}=\underbrace{\vec{e_1}}_{\in G_1}+0\underbrace{(\vec{e_1}+\vec{e_2})}_{\in G_2}.$$

1.4.4 Somme directe.

On dit que la somme F_1+F_2 *est* $directe$ *si* $F_1\cap F_2=\{\vec{0}_E\}$. *Dans ce cas on convient de noter* $F_1\oplus F_2$ *à la place de* F_1+F_2.

Propriété. *Si* $F_1\oplus F_2$ *alors pour tout* $(\vec{x_1},\vec{x_2})\in F_1\times F_2$ *et* $(\vec{x_1'},\vec{x_2'})\in F_1\times F_2$ *on a l'implication :*

$$\vec{x_1}+\vec{x_2}=\vec{x_1'}+\vec{x_2'}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{lll}\vec{x_1}&=&\vec{x_1'}\\\vec{x_2}&=&\vec{x_2'}.\end{array}\right.$$

Autrement il existe une et une seule façon de décomposer un vecteur de $F_1\oplus F_2$ *en la somme d'un vecteur de* F_1 *et d'un vecteur de* F_2.

Exemple. *Avec les définitions précédentes des vecteurs* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *et en posant* $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, *on vérifie que :*

(a) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\}\oplus\mathrm{vect}\{\vec{e_2}\}=(Oxy)$

(b) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\}\oplus\mathrm{vect}\{\vec{e_1}+\vec{e_2}\}=(Oxy)$

(c) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1},\vec{e_2}\}\oplus\mathrm{vect}\{\vec{e_1},\vec{e_3}\}=\mathbb{R}^3$ *mais cette somme n'est pas directe car :*

$$\begin{array}{rcl}\vec{e_1}+\vec{e_2}&=&0\vec{e_1}+0\vec{e_2}+1(\vec{e_1}+\vec{e_2})+0\vec{e_3}\\&=&1(\vec{e_1}+0\vec{e_2})+0(\vec{e_1}+\vec{e_2})+0\vec{e_3}.\end{array}$$

1.4.5 Sous-espaces supplémentaires

Deux sev F_1 *et* F_2 *de* E *sont dits* $supplémentaires\ dans\ E$ *si* $E=F_1\oplus F_2$.

Remarque. *Par application des définitions de somme et de somme directe de deux sev introduites ci-dessus, on obtient :*

$$\left\{\begin{array}{l}E=F_1+F_2\Longleftrightarrow\forall\vec{x}\in E,\ \exists(\vec{x_1},\vec{x_2})\in F_1\times F_2\ \text{tel que}\ \vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}\\F_1\oplus F_2\Longleftrightarrow\text{la décomposition}\ \vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}\ \text{est unique,}\end{array}\right.$$

donc

$$\boxed{E=F_1\oplus F_2\Longleftrightarrow\forall\vec{x}\in E,\ \exists!(\vec{x_1},\vec{x_2})\in F_1\times F_2\ \text{tel que}\ \vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}.}$$

La remarque précédente permet d'étendre la définition au cas de $n\geq 3$ *sev* $F_1,F_2,\ldots,F_n$ *de* E *:*

$$E=F_1\oplus F_2\oplus\ldots\oplus F_n\Longleftrightarrow\forall x\in E,\ \exists!(\vec{x_1},\ \vec{x_2},\ \ldots,\vec{x_n})\in F_1\times F_2\times\ldots F_n,\ \vec{x}=\vec{x_1}+\vec{x_2}+\ldots+\vec{x_n}.$$

Exemples.
(a) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_2}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_3}\} = \mathbb{R}^3$
(b) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_1}+\vec{e_2}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_2}+\vec{e_3}\} = \mathbb{R}^3$
(c) $\mathbb{R}_n[X] = \oplus_{i=1}^{n} \mathrm{vect}\{X^i\}$.

2 Base d'un espace vectoriel

Soit E un K-ev

2.1 Famille génératrice

Une famille $\mathcal{F} = (\vec{f_i})_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite génératrice de E si :

$$E = vect(\mathcal{F}).$$

Cela revient à dire que tout vecteur $\vec{u}$ de E peut se mettre sous la forme d'(au moins) une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists J \subset I \text{ finie et } \lambda_j \in K,\ j \in J,\ \text{tel que } \vec{x} = \sum_{j\in J} \lambda_j \vec{f_j}.$$

Exemple.
(a) Pour tout $n \geq 1$, $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) $\{X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
(c) $\{X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2), X(X-3)\}$ est également une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice. *Trouver une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.*

Propriétés.
(a) Toute famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E.
(b) Toute famille extraite d'une famille non génératrice de E n'est pas génératrice de E.

Remarque. *On choisit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur de $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. C'est donc une CL de $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puisque $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Cela montre que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, c'est-à-dire que $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-y)\vec{e_1} + y(\underbrace{\vec{e_1}+\vec{e_2}}_{\vec{f_2}})$, et donc que $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}\}$ est également une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Tout comme $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \underbrace{\vec{e_1}-\vec{e_2}}_{\vec{f_3}}\}$ d'ailleurs, puisque $\vec{u} = x\vec{e_1} + \frac{y}{2}\vec{f_2} - \frac{y}{2}\vec{f_3}$. Mais, on a aussi $\vec{u} = (x-y)\vec{e_1} + y\vec{f_2} + 0\vec{f_3}$, donc $\vec{u}$ ne se décompose pas de façon unique sur la famille $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$. Cela vient de ce que $\vec{f_3}$ est CL de $\vec{e_1}$ et $\vec{f_2}$, car $\vec{f_3} = 2\vec{e_1} - \vec{f_2}$. Afin d'éliminer les vecteurs "inutiles" du type de $\vec{f_3}$, on introduire mainteanant la notion d' indépendance linéaire.*

2.2 Indépendance linéaire

Une famille $\{\vec{f_i}, i \in I\}$ de vecteurs de E est dite libre (dans E) si elle satisfait l'implication suivante :

> *Pour tout sous-ensemble <u>fini</u> J de I, $\forall \lambda_j \in K,\ j \in J,$ $\left(\sum_{j\in J} \lambda_j \vec{f_j} = \vec{0}_E\right) \Longrightarrow (\forall j \in J, \lambda_j = 0)$.*

De façon équivalente, on dit que les vecteurs $\vec{f_i}$, $i \in I$, sont linéairement indépendants.

S'il existe au contraire un nombre fini de scalaires $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_p}$ (avec $i_1, i_2, \ldots, i_p \in I$) non tous nuls tels que

$$\sum_{s=1}^{p} \lambda_{i_s} \vec{f_{i_s}} = \vec{0}_E,$$

on dit que la famille $\{\vec{f_i}, i \in I\}$ est liée (dans E). Cela revient à dire que l'un de ses vecteurs, $\vec{f_{i_{s^*}}}$, est une CL des vecteurs de la famille $\{\vec{f_{i_s}}, 1 \leq s \leq p, s \neq s^*\}$.

Exemples.

(a) Si l'on reprend le cas du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$ et les notations de l'exemple précédent, la famille $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ est liée car $2\vec{e_1} - \vec{f_2} - \vec{f_3} = \vec{0}$. Par contre, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est une famille libre, car pour tout λ et μ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\left(\lambda\vec{e_1} + \mu\vec{e_2} = \vec{0}\right) \Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow (\lambda = \mu = 0).$$

(b) Les familles $\{\sin, \cos\}$, $\{\sin, \exp\}$ et $\{\mathrm{sh}, \exp\}$ sont libres dans le $\mathbb{R}$-ev E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Par contre la famille $\{\mathrm{sh}, \exp, 1/\exp\}$ est liée dans E.

Propriétés.

(a) Toute famille qui contient $\vec{0}_E$ est liée.

(b) Toute famille contenant une famille liée est liée.

(c) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

2.3 Base

Une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une base de E si c'est une une famille libre et une famille génératrice de E.

Propriété fondamentale. *Dans une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_i},\ i \in I\}$ de E, tout vecteur de E se décompose de façon unique en une CL de vecteurs de $\mathcal{B}$:*

$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists! J \subset I \text{ et } (x_j)_{j \in J} \in K^J,\ \vec{x} = \sum_{j \in J} x_j \vec{e_j}.$$

Vocabulaire. *Les scalaires x_j, $j \in J$, sont appelés coordonnées ou composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemples.

(a) $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (on l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^2$), ce qui n'est pas le cas de $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ car cette famille est liée.

(b) Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{B}_n = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Propriétés.

(a) Toute sous-famille stricte d'une base n'est pas génératrice (ie "une base est une famille génératrice minimale").

(b) Toute sur-famille stricte d'une base est liée (ie "une base est une famille libre maximale").

3 Dimension

3.1 Définitions

Un K-ev E sera dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Dans la cas contraire il sera dit de dimension infinie.

Exemple. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie puisque $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une famille génératrice (à $n+1$ éléments) de $\mathbb{R}_n[X]$. Par contre $\mathbb{R}[X]$ ne possède aucune famille génératrice finie donc est de dimension infinie.*
On a par ailleurs le théorème (admis) essentiel suivant :

Théorème 3.1. *Tout ev possède au moins une base.*

Propriété. *Dans un ev de dimension finie E, toutes les bases ont même nombre d'éléments, appelé dimension de E et notée $\dim E$.*

Conséquence. *Si $\dim E = n \geq 1$, pour montrer que la famille à n vecteurs $\mathcal{B} = \{\vec{e_i},\ i \in I\}$ est une base de E, il suffit de vérifier que :*

(i) soit $\mathcal{B}$ est libre.

(ii) soit $\mathcal{B}$ est génératrice.

Exercice. *Soient $n \geq 1$ et $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ des réels. Pour chaque $0 \leq i \leq n$, on définit $i^{\text{ème}}$ polynôme d'interpolation de Lagrange*

$$P_i(x) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}.$$

Montrer de deux façons différentes que $\{P_i,\ 0 \leq i \leq n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque. *E désignant toujours un K-ev de dimension n (éventuellement infinie), on vérifie que :*

(i) Toute famille génératrice de E possède AU MOINS n éléments.

(ii) Si la dimension n est finie, toute famille génératrice de E comportant n vecteurs est une base de E.

(iii) Toute famille libre de E possède AU PLUS n éléments.

(iv) Si la dimension n est finie, toute famille libre de E comportant n vecteurs est une base de E.

3.2 Dimension d'un sev

On suppose que $\dim E = n$ est finie et que F est un sev de E.
Toute famille de vecteurs de F qui est libre dans F est a fortiori libre dans E. Le nombre de vecteurs de F linéairement indépendants dans F est donc toujours inférieur ou égal à $\dim E$. Soit $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ une famille libre maximale de vecteurs de F. D'après ce qui précède, on a $p \leq \dim E$.
Ensuite, pour tout vecteur $\vec{f} \in F$, la famille $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{f}\}$ est liée donc il existe $p+1$ scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda$ non tous nuls tels que $\lambda \vec{f} + \lambda_1 \vec{f_1} + \ldots + \lambda_p \vec{f_p} = \vec{0}_E$. Comme $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ est libre on a forcément $\lambda \neq 0$, et donc :

$$\vec{f} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{f_1} - \ldots - \frac{\lambda_p}{\lambda}\vec{f_p},$$

ce qui montre que $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ est une famille génératrice de F. Par suite, $\dim F = p \leq \dim E$.
Supposons maintenant que $\dim F = \dim E$. Alors la famille $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}$ qui est libre dans F est libre dans E donc c'est une base de E et donc une famille génératrice de E, ce qui montre que $E \subset F$ et donc que $E = F$ grâce à l'inclusion réciproque.

Propriété. *Si $\dim E$ est finie alors pour tout sev F de E, on a :*

(a) $\dim F \leq \dim E$

(b) $\dim F = \dim E \Longrightarrow F = E$.

Rang. *Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, noté $\operatorname{rg}\mathcal{F}$, est la dimension du sev engendré par $\mathcal{F}$:*

$$\boxed{\operatorname{rg}\mathcal{F} = \dim(\operatorname{vect}\mathcal{F}).}$$

Vu ce qui précède, on a toujours $\operatorname{rg}\mathcal{F} \leq \dim E$ et $(\operatorname{rg}\mathcal{F} = \dim E) \Leftrightarrow (\operatorname{vect}\mathcal{F} = E)$.

3.3 Théorème de la base incomplète

Soit E un ev de dimension finie n. Commençons par faire la remarque suivante :

Remarque. *Si $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ une famille libre dans E et que $p < n$, alors il existe $\vec{g} \in E$ tel que $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{g}\}$ est une famille libre dans E.*
En effet, dans le cas contraire tout vecteur de E serait CL des vecteurs $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}$ donc $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ serait une famille génératrice et donc une base de E, ce qui impliquerait $p = \dim E = n$, ce qui est faux par hypothèse.
Ainsi partant d'une famille libre $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ à $p < n = \dim E$ éléments, il est toujours possible selon la remarque précédente d'ajouter des vecteurs à cette famille tout en conservant la propriété d'indépendance linéaire. Ceci jusqu'à ce que le nombre total de veceturs obtenus soit égal à n. On construit ainsi une famille libre dans E dont la cardinalité est égale à $\dim E$: c'est une base de E. Ce qui démontre le :

Théorème 3.2. *Toute famille libre $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$, $p < n$ dans l'ev E de dimension n peut être complétée en une base de E.*

3.4 Dimension de la somme de sev

Proposition 3.1. *Si F_1 et F_2 sont deux sev d'un ev de dimension finie E alors*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2).$$

Pour démontrer cette proposition, on considère une base $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ de $F_1 \cap F_2$. Comme $\mathcal{F}$ est une famille libre de F_1, le théorème 3.2 garantit l'existence de q vecteurs $\vec{g_1}, \ldots, \vec{g_q}$ de F_1 tels que $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \ldots, \vec{g_q}\}$ est une base de F_1. De même, il existe r vecteurs $\vec{g'_1}, \ldots, \vec{g'_r}$ de F_2 complétant $\mathcal{F}$ en une base $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{g'_1}, \ldots, \vec{g'_r}\}$ de F_2. Par suite $\mathcal{B} = \{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \ldots, \vec{g_q}, \vec{g'_1}, \ldots, \vec{g'_r}\}$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$. Afin de montrer qu'elle est libre, considérons la CL nulle suivante

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \vec{g'_i} = \vec{0}_E,$$

les λ_i, α_i et β_i correspondants étant pris dans K. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} = -\sum_{i=1}^{r} \beta_i \vec{g'_i}.$$

Le membre de gauche de cette égalité appartenant à F_1 et celui de droite à F_2, on a forcément $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} \in F_1 \cap F_2$ donc il existe p scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \vec{f_j},$$

soit de façon équivalente

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) \vec{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \vec{g_j} = \vec{0}_E.$$

Or $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \ldots, \vec{g_q}\}$ est une famille libre de E donc

$$\lambda_i = \mu_i,\ 1 \leq i \leq p,\ \text{et } \alpha_j = 0,\ 1 \leq j \leq q.$$

De manière identique on démontre en considérant le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \vec{g'_j}$ que tous les β_j, $1 \leq j \leq r$, sont nuls. Ceci entraîne immédiatemment que $\lambda_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$ (puisque $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} = \vec{0}_E$ et que $\mathcal{F}$ est une famille libre) et prouve ainsi que les veceturs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants.

Cas particulier de deux sev supplémentaires. *Dans le cas où $F_1 \oplus F_2$, on a $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$ par définition donc $\dim F_1 \cap F_2 = 0$, ce qui permet de simplifier la formule précédente :*

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2.$$

Conséquence : existence d'un supplémentaire. *E désignant toujours un ev de dimension finie et F un sev de E, il existe toujours G sev de E tel que*

$$F \oplus G = E.$$

4 Matrices

4.1 Définition

Une matrice M est un tableau à $n \geq 1$ lignes et $p \geq 1$ colonnes, d'éléments de K. Si l'on note $m_{i,j}$ l'élément de cette matrice situé à l'intersection de $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne, on obtient :

$$M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,j-1} & m_{1,j} & m_{1,j+1} & \dots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,j-1} & m_{2,j} & m_{2,j+1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{i-1,1} & m_{i-1,2} & \dots & m_{i-1,j-1} & m_{i-1,j} & m_{i-1,j+1} & \dots & m_{i-1,p} \\ m_{i,1} & m_{i,2} & \dots & m_{i,j-1} & m_{i,j} & m_{i,j+1} & \dots & m_{i,p} \\ m_{i+1,1} & m_{i+1,2} & \dots & m_{i+1,j-1} & m_{i+1,j} & m_{i+1,j+1} & \dots & m_{i+11,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,j-1} & m_{n,j} & m_{n,j+1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Lorsque la ligne i et la colonne j ne sont pas spécifiées, $m_{i,j}$ s'appelle le terme général de la matrice M.
L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes (appelées plus simplement matrices (n,p) dans la suite) dont les éléments appartiennent à K est noté $M_{n,p}(K)$. Lorsque $n = p$, toute matrice de $M_{n,p}(K)$ a autant de lignes de que colonnes : on parle alors de "matrice carrée" et on note $M_n(K)$ à la place de $M_{n,n}(K)$.

4.2 Exemples

Matrice nulle. *C'est une matrice (n,p) dont tous les termes sont nuls : $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.*

Matrice colonne. *C'est une matrice $(n,1)$: $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{i,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$.*

Matrice ligne. *C'est une matrice $(1,p)$: $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} & \dots & m_{1,p} \end{pmatrix}$.*

Matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). *C'est une matrice carrée (n,n) dont tous les éléments situés au dessus (resp. en dessous) de la diagonale sont nuls :*

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & 0 \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\textit{resp. } M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}).$$

Matrice diagonale. *C'est une matrice (carrée) triangulaire inférieure et supérieure. Tous ses termes non diagonaux sont donc nuls :*

$$D = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Matrice identité. *C'est une matrice diagonale (notée I_n lorsqu'elle a n lignes) dont tous les termes diagonaux valent 1 :*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. *Le scalaire λ est une matrice $(1,1)$.*

4.3 Opérations sur les matrices

4.3.1 Multiplication par un scalaire et addition

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Multiplication par un scalaire. *Soit M une matrice de $M_{n,p}(K)$, de terme général $m_{i,j}$. Pour tout $\lambda \in K$, on définit la matrice λM comme l'unique matrice (n,p) dont le terme général est $\lambda m_{i,j}$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(K),\ \forall \lambda \in K,\ \lambda M = (\lambda m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.}$$

Addition. *Soient $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ et $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ deux matrices de $M_{n,p}(K)$. Alors, la somme des matrices M et S est la matrice (n,p) dont le terme général est $m_{i,j} + s_{i,j}$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall M = (m_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(K),\ \forall S = (s_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(K),\ M + S = (m_{i,j} + s_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}.}$$

Comme l'addition est commutative dans K, il résulte de la définition précédente qu'elle l'est également dans $M_{n,p}(K)$:

$$\boxed{\forall (M,S) \in M_{n,p}(K) \times M_{n,p}(K),\ M + S = S + M.}$$

Remarque. *On ne peut additionner deux matrices que si celles-ci ont* **même nombre de lignes** *et* **même nombre de colonnes**. *Ainsi, S appartenant à $M_{n,p}(K)$, la matrice $-S = (-1)S$ est également dans $M_{n,p}(K)$, donc, pour toute matrice $M \in M_{n,p}(K)$, la somme $M + (-S)$, notée plus simplement $M - S$ a bien un sens. On définit ainsi la soustraction dans $M_{n,p}(K)$. On vérifie d'ailleurs que $M - M$ est la matrice nulle de $M_{n,p}(K)$.*

$M_{n,p}(K)$ **est un espace vectoriel.** *Il est facile de vérifier que la multiplication par un scalaire et l'addition qui viennent d'être définies, donnent à $M_{n,p}(K)$ une struture d'e.v.*

4.3.2 Multiplication matricielle

Définition. *Soient m, n et p, trois entiers naturels non nuls, et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in M_{n,p}(K)$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le m}} \in M_{p,m}(K)$. Alors, le produit de la matrices A par la matrice B est la matrice (n,m) dont le terme général est :*

$$\boxed{c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}.} \tag{1}$$

Exemple. *On prend $K = \mathbb{R}$, $n = 2$, $m = 4$ et $p = 3$. Ensuite :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Alors :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 14 & 20 \\ 2 & 11 & 20 & 29 \end{pmatrix}.$$

La multiplication matricielle est associative. *On vérifie en effet sans difficulté que :*

$$\boxed{\forall (m,n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^4,\ \forall (A,B,C) \in M_{m,n}(K) \times M_{n,p}(K) \times M_{p,q}(K),\ (AB)C = A(BC).}$$

La multiplication matricielle n'est PAS commutative. *La multiplication d'une matrice A par une matrice B n'a de sens que si* **le nombre de colonnes de A= le nombre de lignes de B.** *Ainsi, si $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{p,m}(K)$, le produit de A par B (qui est bien autorisé) définit une matrice (n,m), ce que l'on note schématiquement :*

$$\boxed{(n,p) \times (p,m) \longrightarrow (n,m).}$$

Par conséquent, si $m \neq n$, le produit BA n'est pas défini (et on n'a aucune chance d'avoir $AB = BA$). Mais, si $n = m$, la matrice BA est une matrice (p,p), donc pour qu'elle puisse être égale à AB, il est nécéssaire que $n = m = p$, c'est-à-dire que A et B soient deux matrices carrées de même taille. Pourtant, même sous cette hypothèse, il n'est pas certain que AB soit égale à BA, comme le montre le contre-exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors que } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elément neutre de la multiplication dans $M_n(K)$. *On vérifie facilement que la matrice identité I_n est élément neutre pour la multiplication dans $M_n(K)$. C'est-à-dire :*

$$\boxed{\forall M \in M_n(K),\ MI_n = I_nM = M.}$$

5 Application linéaire et représentation matricielle

Soient E un K-e.v. de dimension $p \geq 1$ et F un K-e.v. de dimension $n \geq 1$. Soient ensuite $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_p})$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots, \vec{f_n})$ une base de F. Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de façon unique sur la base $\mathcal{B}$: il existe un unique n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de K^p tel que

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_p\vec{e_p} = \sum_{k=1}^{p} x_k\vec{e_k}.$$

La matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in M_{p,1}(K)$ des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$ décrit donc complètement $\vec{x}$. C'est pourquoi, on identifie parfois $\vec{x} \in E$ à la matrice X de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, ce qui *revient en fait à identifier E à $M_{p,1}(K)$, ou E à K^p. Ainsi, si M est une matrice (n,p), on utilisera parfois la notation $M\vec{x}$ (qui n'a pas de sens, rigoureusement) à la place de MX (qui, elle, est un produit matriciel $(n,p)\times(p,1)$ parfaitement défini).*

Considérons maintenant une application linéaire φ de E dans F : c'est-à-dire une application $\varphi : E \mapsto F$ qui vérifie :

$$\forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2,\ \forall(\lambda,\mu)\in K^2,\ \varphi(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u})+\mu\varphi(\vec{v}).$$

Pour tout $k \in \{1,2,\ldots,p\}$, $\varphi(\vec{e_k})$ est un vecteur de F. En notant $(m_{1,k}, m_{2,k},\ldots,m_{n,k})$ les cordonnées de $\varphi(\vec{e_k})$ dans la base $\mathcal{C}$, on a donc :

$$\varphi(\vec{e_k}) = m_{1,k}\vec{f_1} + m_{2,k}\vec{f_2} + \ldots + m_{n,k}\vec{f_n} = \sum_{j=1}^{n} m_{j,k}\vec{f_j}. \tag{2}$$

Notons maintenant M la matrice de $M_{p,n}(K)$ obtenue en "écrivant en colonnes les vecteurs $\varphi(\vec{e_1}),\varphi(\vec{e_2}),\ldots,\varphi(\vec{e_p})$ dans la base $\mathcal{C}$" :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \varphi(\vec{e_1}) & \varphi(\vec{e_2}) & \ldots & \varphi(\vec{e_p}) \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \ldots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ldots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \ldots & m_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{f_1} \\ \vec{f_2} \\ \vdots \\ \vec{f_n} \end{array}. \end{array}$$

Cette matrice, généralement notée $mat(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{C})$, s'appelle "matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ (au départ) et $\mathcal{C}$ (à l'arrivée)".

Ensuite, comme φ est linéaire, on a : $\vec{y} = \varphi(\vec{x}) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\vec{e_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} x_k\varphi(\vec{e_k})$. Donc, en tenant compte de (2), il vient ensuite :

$$\vec{y} = \sum_{k=1}^{p} x_k\left(\sum_{j=1}^{n} m_{j,k}\vec{f_j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{p} m_{j,k}x_k}_{y_j}\right)\vec{f_j}. \tag{3}$$

Notons maintenant Y la matrice colonne $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ des coordonnées de $\varphi(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{C}$. Alors, il résulte de la définition (1) du produit matriciel, et de l'expression des y_j, $1 \le j \le n$, trouvée dans (3) que :

$$\boxed{Y = MX.}$$

Autrement dit, pour trouver les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de l'image par φ d'un vecteur $\vec{x}$ de E, il suffit de multiplier la matrice $mat(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{C})$ par la matrice colonne des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\vec{y} = \varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow Y = MX \Leftrightarrow \text{“}\vec{y} = \varphi(\vec{x}) = M\vec{x}\text{”}}.$$

6 Inversion matricielle

6.1 Inversibilité

Définition. *Soit $M \in M_n(K)$ une matrice* **carrée** *de taille $n \ge 1$. On dit que M est inversible dans $M_n(K)$, s'il existe une matrice de $M_n(K)$ notée généralement M^{-1}, telle que :*

$$\boxed{MM^{-1} = M^{-1}M = I_n.}$$

Une telle matrice M^{-1}, **si elle existe***, est unique, et s'appelle "inverse de M dans $M_n(K)$".*

Exemple. *La matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *est inversible, d'inverse* $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, *car on a :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Remarque. *Par définition, pour qu'une matrice* M *soit inversible, il est nécessaire qu'elle soit carrée. Néanmoins, ce n'est pas une condition suffisante d'inversibilité, même si la matrice considérée est non nulle. Pour le voir, remarquons d'abord que toute matrice* $M \in M_n(K)$ *pour laquelle il existe un vecteur* $\vec{u}$ **non nul** *de* K^n *satisfaisant* $M\vec{u} = \vec{0_{K^n}}$, *n'est pas inversible. En effet, dans le cas contraire,on aurait :*

$$\underbrace{M^{-1}(M\vec{u})}_{(M^{-1}M)\vec{u}} = \underbrace{M^{-1}\vec{0_{K^n}}}_{\vec{0_{K^n}}},$$

donc, comme $(M^{-1}M)\vec{u} = I_n\vec{u} = \vec{u}$, *le vecteur* $\vec{u}$ *serait nul, ce qui est contraire aux hypothèses.*
Ainsi par exemple, la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est non nulle, mais elle n'est pas inversible pour autant car* $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{0_{\mathbb{R}^2}}$. *En fait, on peut caractériser les matrices inversibles grâce au théorème suivant :*

Théorème 6.1. *Une matrice* M *de* $M_n(K)$, $n \geq 1$, *est inversible, si et seulement si l'unique vecteur* $\vec{u} \in K^n$ *satisfaisant* $M\vec{u} = \vec{0_{K^n}}$ *est le vecteur* $\vec{0_{K^n}}$.

A l'aide de ce résultat, on montre facilement que toute matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est inversible, si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Conséquence. *Toutes les matrices non nulles de* $M_n(K)$ *n'étant pas forcément inversibles lorsque* $n \geq 2$, *il faut prendre garde au fait que l'on peut y trouver* A *et* B *toutes les deux* **non nulles** *et telles que* $AB = 0_{M_n(K)}$. *Ainsi,* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est non nulle mais* $A^2 = 0_{M_2(K)}$.

6.2 Calcul de l'inverse d'une matrice : méthode du pivot de Gauss

Soit M *une matrice de* $M_n(K)$, *où* $n \geq 1$. *Pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *on note* L_i *la* $\mathrm{i}^{\text{ième}}$ *ligne de la matrice* M *:*

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \ldots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ldots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \ldots & m_{n,n} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix}.$$

Opérations sur les lignes de M. *On définit trois types d'opérations sur les lignes* L_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *de la matrice* M *:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\mathbf{m}) : & \textit{multiplication d'une ligne } L_i \textit{ par un scalaire } \lambda \textbf{ non nul}, \textit{ notée } \text{“}L_i \leftarrow \lambda L_i\text{” (on remplace la ligne} \\ & L_i = (m_{i,1}, m_{i,2}, \ldots, m_{i,n}) \textit{ par } \lambda L_i = (\lambda m_{i,1}, \lambda m_{i,2}, \ldots, \lambda m_{i,n})); \\ (\mathbf{p}) : & \textit{permutation des lignes } L_i \textit{ et } L_j,\ i \neq j, \textit{ notée } \text{“}L_i \leftrightarrow L_j\text{”}; \\ (\mathbf{a}) : & \textit{ajout de la ligne } L_j \textit{ à la ligne } L_i, \textit{ pour } i \neq j, \textit{ notée } \text{“}L_i \leftarrow L_i + L_j\text{”}. \end{array} \right.$$

En combinant les opérations $(\mathbf{m})$ *et* $(\mathbf{a})$, *on peut notamment effectuer des manipulations du type*

$$(\mathbf{cl}) : \quad L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j,$$

pour tous $i \neq j$, $\lambda \in K^*$ *(*λ **non nul***) et* $\mu \in K$.

Description de la méthode. *L'objectif de la méthode est de transformer la matrice M en la matrice I_n à l'aide des seules opérations $(\mathbf{m})$, $(\mathbf{p})$ et $(\mathbf{a})$, ou, ce qui revient au même, à l'aide de $(\mathbf{p})$ et de $(\mathbf{cl})$. Dans la suite, afin d'alléger les notations, les différentes matrices obtenues à partir de M par application de ces opérations seront encore notées M.*

La méthode (dite du "Pivot de Gauss") procède comme suit :

- *si $m_{i,1} = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (la première colonne de M est nulle), M n'est pas inversible, et c'est réglé ;*
- *sinon, il existe au moins un indice $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $m_{i_0,1} \neq 0$. Quitte à permuter L_1 et L_{i_0} ($L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$), on peut supposer que $m_{1,1} \neq 0$. On effectue alors les opérations suivantes :*
  1. *$L_1 \leftarrow \frac{1}{m_{1,1}} L_1$, ce qui impose $m_{1,1} = 1$;*
  2. *$L_j \leftarrow L_j - m_{j,1} L_1$, pour tout $j \in \{2, 3, \dots, n\}$, ce qui remplace tous les termes de la première colonne de M, à l'exception du premier d'entre eux, par 0. La matrice M transformée devient ainsi :*

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

  3. *On passe ensuite à la deuxième colonne :*
     - *si $m_{i,2} = 0$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$ (tous les termes de la deuxième colonne situés "en dessous" de $m_{1,2}$ sont nuls), alors la matrice M n'est pas inversible, et c'est fini ;*
     - *sinon, quitte à permuter L_2 avec une ligne L_{i_0} pour un indice $i_0 \geq 2$, on peut supposer que $m_{2,2} \neq 0$. On effectue alors les opérations suivantes :*
       (a) *$L_2 \leftarrow \frac{1}{m_{2,2}} L_2$, ce qui impose $m_{2,2} = 1$;*
       (b) *$L_j \leftarrow L_j - m_{j,2} L_2$, pour tout $j \neq 2$, ce qui remplace tous les termes de la deuxième colonne de M, à l'exception du deuxième d'entre eux, par 0. A ce stade, la matrice M est devenue :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Et ainsi de suite...

Dans le même temps, toutes les opérations effectuées sur M en vue de la transformer en la matrice identité doivent être reportées à l'identique sur la matrice I_n. Si l'on parvient effectivement à transformer M en la matrice I_n avec cette méthode, M est inversible, et la matrice obtenue en reportant toutes ces opérations sur I_n est alors M^{-1}.

Exemple. *La matrice à inverser est* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$*. On applique la méthode de Gauss en partant de la matrice* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Les étapes du calcul se présentent comme suit :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2}L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2}L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow -L_3 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice M est donc inversible, et son inverse est $M^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Application à la résolution de systèmes linéaires $n \times n$. *Soit le système linéaire à n équations, et n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suivant :*

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots a_{n,n}x_n & = & b_n, \end{array} \right.$$

où les $a_{i,j}$ et b_j, $1 \leq i, j \leq n$, sont donnés.

Posons alors $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ *et* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*. Avec ces définitions, il est clair que*

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est solution du système linéaire* (S) *si et seulement le vecteur des inconnues,* X*, satisfait :*

$$AX = B.$$

Par suite, **lorsque A est inversible**, *le système* (S) *possède une unique solution, à savoir* $X = A^{-1}B$*, et ceci,* **quel que soit le second membre B de (S)**.

Exemple. *Quels que soient* b_1*,* b_2 *et* b_3*, le système linéaire*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & b_2 \\ 2x_1 & + & & & 3x_3 & = & b_3, \end{array}\right.$$

admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3b_1 + 3b_2 + b_3 \\ 3b_1 - b_2 - b_3 \\ 2b_1 - 2b_2 \end{pmatrix}.$$