Université d'Aix-Marseille
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux & Télécommunications

Travaux dirigés d'algèbre

1 Nombres entiers et réels

1.1 Exercices traités en TD

1.1.1 Récurrence

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les égalités suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2} \quad \textbf{b)} \sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1.1.2 Formule du binôme de Newton et C_n^p

a) A l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$ et $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\, C_n^p$. En déduire la valeur de $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots$ et de $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots$.
b) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que $p\, C_n^p = n\, C_{n-1}^{p-1}$ pour chaque $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
c) En déduire que $\sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p = n2^{n-1}$.

1.1.3 Valeur absolue

a) Démontrer l'implication: $(|x| + |y| \leq 1) \Rightarrow (|x + y| \leq 1$ et $|x - y| \leq 1)$.
b) Montrer que $|x| + |y| = \max(|x + y|, |x - y|)$.
c) En déduire que l'on a l'équivalence

$$(|x| + |y| \leq 1) \Leftrightarrow (|x + y| \leq 1 \text{ et } |x - y| \leq 1)\,.$$

1.1.4 Inégalités

a) Pour tous a et b positifs, vérifier l'équivalence : $(a \leq b) \Leftrightarrow (a^2 \leq b^2)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\textbf{b1)}\ \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} \geq 1 \quad \textbf{b2)}\ 2(x - 1) \leq \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

1.1.5 Partie entière

a) Rappeler l'encadrement de $y \in \mathbb{R}$ par $E(y)$ [1].
b) En déduire que $-E(-x)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x.

1.2 Exercices supplémentaires

1.2.1 Récurrence

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ les égalités suivantes :

$$\textbf{a)} \sum_{p=1}^{n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \textbf{b)} \sum_{k=1}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

---

[1] $E(y)$ désigne la partie entière du réel y

1.2.2 Formule du binôme de Newton et C_n^p

a) A l'aide de la formule du binôme de Newton, donner l'expression de $f(x) = (1+x)^n$ en fonction de x^p, $0 \leq p \leq n$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} 2^p \ C_n^p$.

c) En dérivant par rapport à x l'égalité établie au **a)**, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p2^p \ C_n^p$.

1.2.3 Inégalités

a) Montrer pour tout $(x, y) \in]-1, 1[^2$ que $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$.

b) Montrer que si $ab > 0$, $(a \leq b) \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}\right)$.

1.2.4 Partie entière

Soit $A(x) = E(x + \frac{1}{2})$.

a) Montrer que $A(x)$ est l'entier le proche de x.

b) Vérifier que $A(x) = E(2x) - E(x)$.

2 Nombres complexes

2.1 Exercices traités en TD

2.1.1 Représentation algébrique

Déterminer la représentation algébrique des nombres complexes suivants :

a) $(2+4j)+(6-5j)$ **b**) $(1-j)+(1+3j)$ **c**) $(1-j)(1+3j)$ **d**) $(2+4j)(6-5j)$ **e**) $\dfrac{1-j}{1+3j}$ **f**) $\dfrac{6-5j}{2+4j}$.

2.1.2 Module et arguments

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

a) 1 **b**) j **c**) 5 **d**) -7 **e**) $4j$ **f**) $-5,1j$ **g**) $1-j$ **h**) $-1+j$ **i**) $2-2\sqrt{3}j$ **j**) $(-1+j)^3$ **k**) $(1-j)(-1+j)$

2.1.3 Représentation algébrique, module et arguments

a) Calculer la représentation algébrique de $\dfrac{1+j}{\sqrt{3}+j}$.

b) Déterminer le module et un argument de $1+j$, $\sqrt{3}+j$ et $\dfrac{1+j}{\sqrt{3}+j}$.

c) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

2.1.4 Module et arguments

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\textbf{a)}\ \frac{1-j}{1+\sqrt{3}j}\quad \textbf{b)}\ \frac{1+j}{1+\sqrt{3}j}\quad \textbf{c)}\ \frac{1-j}{-1-j}\quad \textbf{d)}\ \frac{1+j}{-1-j}\quad \textbf{e)}\ \frac{1-j}{-1+j}.$$

2.1.5 Notation exponentielle

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a) 1 **b**) $-1,1$ **c**) j **d**) 5 **e**) -6 **f**) $4j$ **g**) $-7,4j$ **h**) $1-j$ **i**) $-1+j$ **j**) $2-2\sqrt{3}j$ **k**) $(-1+j)^3$

2.1.6 Notation exponentielle / Racines $n^{\text{ièmes}}$

En utilisant la notation exponentielle des nombres complexes, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\textbf{a)}\ z^5 = 1 \quad \textbf{b)}\ z^3 = 7.$$

2.1.7 Notation exponentielle

En utilisant la notation exponentielle des nombres complexes, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\textbf{a)}\ z^2 + |z|^2 = 3 \quad \textbf{b)}\ z = j\bar{z}.$$

2.1.8 Notation exponentielle / Module et arguments

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\textbf{a)}\ \frac{-1+j}{1+j} \quad \textbf{b)}\ \frac{-1+j}{3+3j} \quad \textbf{c)}\ \sin a \pm j\cos a,\ a\in\mathbb{R} \quad \textbf{d)}\ \mathrm{e}^{ja}\pm\mathrm{e}^{jb},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

2.1.9 Conjugaison

Soit $u\in\mathbb{C}$ tel que $|u|=1$.
a) Exprimer $\overline{u}$ en fonction de u.
b) Montrer que le conjugué de $\dfrac{1}{1-u}$ est $\dfrac{u}{u-1}$.
c) Pour tout $z\in\mathbb{C}$, montrer alors que $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\in\mathbb{R}$.

2.1.10 Notation exponentielle et conjugaison

En utilisant la notation exponentielle des nombres complexes, déterminer les complexes z tels que z^2 et z^6 sont conjugués.

2.1.11 Formules d'Euler

a) Linéariser $\sin^4\theta$, avec $\theta\in\mathbb{R}$.
b) Linéariser $\cos^5\theta$, avec $\theta\in\mathbb{R}$.

2.1.12 Formules d'Euler

Déterminer le module et un argument du nombre complexe $1+\mathrm{e}^{j\theta}$, avec $\theta\in\mathbb{R}$

2.1.13 Formules de Moivre

a) Calculer $\sin(4\theta)$, avec $\theta\in\mathbb{R}$.
b) Après avoir déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle du nombre complexe $1+j$ en déduire celles du nombre complexe $(1+j)^3$.

2.1.14 Exponentielle complexe

Trouver les nombres complexes vérifiant l'une des conditions suivantes :

$$\textbf{a)}\ \mathrm{e}^z=-3 \quad \textbf{b)}\ \mathrm{e}^z=x,\ x\in\mathbb{R} \quad \textbf{c)}\ \mathrm{e}^z=-j6 \quad \textbf{d)}\ \mathrm{e}^z=jx,\ x\in\mathbb{R} \quad \textbf{e)}\ \mathrm{e}^z=-1-j \quad \textbf{f)}\ \mathrm{e}^z=0$$

2.1.15 Equations complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$\begin{array}{lll}
\textbf{a)}\ z^3-8=0 & \textbf{b)}\ z^2=1+j\sqrt{2} & \textbf{c)}\ z^2-2z+5=0\\
\textbf{d)}\ -z^2+3z-2=0 & \textbf{e)}\ z^2+2jz-5=0 & \textbf{f)}\ z^2+(1-3j)z-(2+j)=0\\
\textbf{g)}\ z^3+j=0 & \textbf{h)}\ z^6=1-j & \textbf{i)}\ z^n=\dfrac{1}{\overline{z}},\ n\in\mathbb{N}.
\end{array}$$

2.2 Exercices supplémentaires

2.2.1 Représentation algébrique

Déterminer la représentation algébrique des nombres complexes suivants :

$$\textbf{a)}\ (2-j4)+(2-j7)\quad \textbf{b)}\ (1+j)+(1-3j)\quad \textbf{c)}\ (1-j)(4+9j)\quad \textbf{d)}\ (3-j4)(5-j2)\quad \textbf{e)}\ \frac{1+3j}{1-3j}.$$

2.2.2 Module et arguments

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$\textbf{a)}\ -1\quad \textbf{b)}\ 2j\quad \textbf{c)}\ \sqrt{5}\quad \textbf{d)}\ \sqrt{4}j\quad \textbf{e)}\ -1-j\quad \textbf{f)}\ -3+j\quad \textbf{g)}\ 10-10\sqrt{3}j\quad \textbf{h)}\ (2+j)^4$$

2.2.3 Représentation algébrique, module et arguments

a) Calculer la représentation algébrique de $\dfrac{2\sqrt{6}(1+j)}{\sqrt{2}(1+j\sqrt{3})}$.

b) Déterminer le module et un argument de $2\sqrt{6}(1+j)$, $\sqrt{2}(1+j\sqrt{3})$ et $\dfrac{2\sqrt{6}(1+j)}{\sqrt{2}(1+j\sqrt{3})}$.

c) En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

2.2.4 Module et arguments

a) Déterminer le module et un argument de: $1+j\tan a$, $a\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\}$.
b) Déterminer le module et un argument de $z=1+\sin\varphi+j\cos\varphi$ pour $\varphi\in\mathbb{R}$, puis celui de z^n lorsque $n\in\mathbb{N}$.

2.2.5 Conjugaison

Soit z un nombre complexe différent de 1 dont le module est égal à 1. Démontrerque le nombre complexe $j\dfrac{1+z}{1-z}$ est un nombre réel.

2.2.6 Utilisation des complexes

a) Montrer, pour tout entier naturel n, que les nombres complexes $(1+j)^n+(1-j)^n$ et $(1+j)^n-(1-j)^n$ sont respectivement réel et imaginaire pur.
b) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer alors $C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\dots$ et $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\dots$, chaque somme étant finie, le dernier terme dépendant de la parité de n.

2.2.7 Caractérisation

Trouver les nombres complexes z vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

$$\textbf{a)}\ |z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1-z|\qquad \textbf{b)}\ |z+1|=|z+j|=|z+jz|.$$

2.2.8 Plan complexe

Montrer que $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$.
Indication : montrer que $(|z+z'| = |z| + |z'|) \Leftrightarrow \left(\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) = |z\overline{z'}|\right)$.

2.2.9 Formules d'Euler

Linéariser $\sin^5\theta$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

2.2.10 Formules de Moivre

a) Calculer $\sin(5\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.
b) Après avoir déterminer la forme trigonométrique et la forme exponentielle du nombre complexe $1-j$ en déduire celles de $(1-j)^4$.

2.2.11 Equations complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$\begin{array}{lll} \textbf{a)}\ z^3 - 8 = 0 & \textbf{b)}\ z^2 = 1 + j\sqrt{2} & \textbf{c)}\ z^2 + 2jz - 5 = 0; \\ \textbf{d)}\ z^3 + j = 0 & \textbf{e)}\ z^6 = 1 - j & \textbf{f)}\ z^n = \dfrac{1}{\overline{z}},\ n \in \mathbb{N} \end{array}$$

2.2.12 Solutions d'une équation du second degré

Soit p un paramètre complexe. On note z_1 et z_2 les racines complexes de l'équation

$$z^2 - 2pz + 1 = 0.$$

a) Calculer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.
b) Montrer que $(z_2 = \overline{z_1}) \Leftrightarrow (p \in \mathbb{R})$.
c) Pour quelles valeurs de p, z_1 et z_2 sont-elles réelles?
d) Pour quelles valeurs de p, z_1 et z_2 sont-elles imaginaires pures?

2.2.13 Un exemple d'utilisation des nombres complexes en électricité

Pour un circuit donné, en régime sinusoidal, si $i(t) = I\cos(\omega t)$ alors $u(t) = U\cos(\omega t - \phi)$. En posant $\tilde{i}(t) = I\mathrm{e}^{j\omega t}$ alors $\tilde{u}(t) = U\mathrm{e}^{j(\omega t - \phi)}$, on définit **l'impédance complexe** du circuit noté Z par
$Z = \dfrac{\tilde{u}(t)}{\tilde{i}(t)} = \dfrac{U}{I}\ \mathrm{e}^{-j\phi} = R + jX$ où R est la résistance et X est la réactance.

Pour un circuit R, L, C série, nous avons $Z = R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}$ $(\omega > 0)$. Déterminer le module et l'argument (la phase) de l'impédance complexe.

3 Polynômes

3.1 Exercices traités en TD

3.1.1 Polynômes

Soient les polynômes $P = (1, -2, 1)$ et $Q = (-1, 3, 1)$.
a) Déterminer $P + Q$, $P - Q$, P^2, Q^2 et PQ.
b) Montrer que $(P + Q)(P - Q) = P^2 - Q^2$.

3.1.2 Polynômes, bis

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $X^5 + X - 1 = (X^3 + X^2 - 1)(aX^2 + bX + c)$.
b) En déduire une décomposition de 100009 en produit de deux entiers.

3.1.3 Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de :

$$\begin{array}{lll} \textbf{a)} \;\; A_1(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 + X - 1 & \text{par} & B_1(X) = X^2 + X + 1; \\ \textbf{b)} \;\; A_2(X) = X^2 & \text{par} & B_2(X) = X^4 + 1; \\ \textbf{c)} \;\; A_3(X) = 2X^4 - X^2 + 3X + 1 & \text{par} & B_3(X) = X^2 + X + 1. \end{array}$$

3.1.4 Division euclidienne, bis

a) Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^5 + X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + 5X - 2$ par $B(X) = X^2 - 2X + 1$.
b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α et de β, le polynôme B divise le polynôme A.

3.1.5 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P(X) = X^2 - (1 + j)X + 1$.

3.1.6 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = X^4 - j$.

3.1.7 Division euclidienne et factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

a) Effectuer la division euclidienne de $A(X) = X^5 + 3X^4 - X^2 - 3X$ par $B(X) = X^2 + X + 1$.
b) Mettre ensuite A sous la forme d'un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3.1.8 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

a) Montrer que j est racine double du polynôme $P(X) = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$.
b) Décomposer ensuite P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

3.1.9 Division selon les puissances croissantes

Effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 2 de $A(X) = 1 + X - 2X^3$ par $B(X) = 1 + X^2$.

3.1.10 Racines et factorisation

Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.
a) Déterminer le degré de P.
b) Montrer que P a (au moins) deux zéros dans $\mathbb{Z}$ dont on précisera la multiplicité.
c) Soit $\omega = e^{j\frac{2\pi}{3}}$.
c1) Vérifier que ω^2 est zéro de P.
c2) Calculer la valeur de $1 + \omega + \omega^2$.
c3) En déduire que ω est également zéro de P.
d) Factoriser alors P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

3.1.11 Racines

Pour quelles valeurs du réel a, le polynôme

$$P_a(X) = X^3 - 3X + a$$

admet-il une racine double? Factoriser alors P_a dans $\mathbb{R}[X]$.

3.2 Exercices supplémentaires

3.2.1 Polynômes

Soient les polynômes $P = (-2, 2, 5)$ et $Q = (-1, 5, -3)$.
a) Déterminer $P+Q$, $P-Q$, P^2, Q^2 et PQ.
b) Montrer que $(P+Q)(P-Q) = P^2 - Q^2$.

3.2.2 Polynômes bis

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que $X^5 + X + 1 = (X^3 - X^2 + 1)(aX^2 + bX + c)$.
b) En déduire une décomposition de 100011 en produit de deux entiers.

3.2.3 Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de :

$$A(X) = X^7 - 2X^3 + X^2 - 1 \text{ par } B(X) = X^4 - X^2 + 2X + 1.$$

3.2.4 Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de :

$$A(X) = X^4 - X^2 + 2X + 1 \text{ par } B(X) = X^7 - 2X^3 + X^2 - 1.$$

3.2.5 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P(X) = X^2 - (1-j)X + 1$.

3.2.6 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P(X) = X^5 - 7j$.

3.2.7 Division selon les puissances croissantes

Effectuer la division suivant les puissances croissantes, à l'ordre 4 de

a) $A_1(X) = 1 - X$ par $B_1(X) = j - X$;
b) $A_2(X) = 1 + X$ par $B_2(X) = 1 - X^2 + X^4$.

3.2.8 Division selon les puissances croissantes, bis

Soit $a \in \mathbb{R}$. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, de $A(X) = 1$ par $B(X) = 1 - \mathrm{e}^{ja}X$.
Vérifier alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 - \mathrm{e}^{ja}x \neq 0$, que l'on a

$$\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{ja}x} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{e}^{jpa}x^p + \frac{\mathrm{e}^{j(n+1)a}x^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{ja}x}.$$

En déduire le quotient des divisions à l'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, de $P_1(X) = 1 - (\cos a)X$ et de $P_2(X) = (\sin a)X$ par $Q(X) = 1 - (2\cos a)X + X^2$.

3.2.9 Division selon les puissances croissantes, bis, bis

a) Effectuer la division de $S(X) = X^7 + \alpha X^6 + \beta X^5 - X^4 + 5X^3 - 2X^2$ par $T(X) = X^4 - 2X^2 + X$ selon les puissances croissantes de X à l'ordre 3.
b) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de α et de β, le polynôme T divise le polynôme S.

3.2.10 Racines et divisibilité

On considère les propriétés (P_1) et (P_2) suivantes :

(P_1) Toute racine du polynôme B est racine du polynôme A
(P_2) Le polynôme B divise le polynôme A.

a) Ces propriétés sont-elles équivalentes ? Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre-exemple et préciser laquelle des deux propriétés implique l'autre.
b) Caractériser (P_2) par l'intermédiaire des racines des polynômes A et B.
c) Application : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $A(X) = X^{2n} + X^n + 1$ et $B(x) = X^2 + X + 1$.
c1) Rappeler l'expression des zéros de B en fonction de $\omega = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}$.
c1) Calculer ω^{3p}, ω^{3p+1} et ω^{3p+2} pour tout $p \in \mathbb{N}$.
c2) En examinant successivement le cas où $n = 3p$, $n = 3p + 1$ et $n = 3p + 2$ pour $p \in \mathbb{N}$, préciser les valeurs de n pour lesquelles le polynôme B divise A.

3.2.11 Factorisation

Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

a)$A(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2$ **b)**$B(X) = X^4 + 2X^2 - 3$ **c)**$C(X) = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$
d)$D(X) = X^4 + X^2 + 1$ **e)**$E(X) = X^3 + 1$ **f)**$F(X) = X^2 - 2x^2 \cos a + 1,\ a \in \mathbb{R}$

4 Fractions rationnelles

4.1 Exercices traités en TD

4.1.1 Décomposition dans $\mathbb{R}$

Décomposer dans $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

a) $F(X) = \dfrac{2X-1}{(X-1)(X-2)}$ **b)** $G(X) = \dfrac{X^2+1}{(X-1)(X^2-4)}$ **c)** $H(X) = \dfrac{X^2+X-3}{X^2-3X+2}$ **d)** $I(X) = \dfrac{X^4}{X^2-X-6}$.

4.1.2 Décomposition dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Décomposer dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1+X^3}$.

4.1.3 Irréductibilité et décomposition

a) Trouver une fraction irréductible égale à $F(x) = \dfrac{x^3-2x+1}{x^4-3x^3+x^2+3x-2}$.
b) Achever ensuite la décomposition.

4.2 Exercices supplémentaires

4.2.1 Décomposition dans $\mathbb{R}$

Décomposer dans $\mathbb{R}$ les fractions suivantes :

a) $J(X) = \dfrac{1}{X(X+1)^2}$ **b)** $K(X) = \dfrac{2X+1}{(X^2-1)^2}$ **c)** $L(X) = \dfrac{X^2-4}{(X-1)^2(X+1)^2}$.

4.2.2 Décomposition dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

Décomposer dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$, la fraction rationnelle $\dfrac{1}{1-X^4}$.

4.2.3 Application au calcul de somme de série

a) Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{X(X+1)}$.
b) Donner une expression simplifiée de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

4.2.4 Décomposition dans $\mathbb{R}$

Décomposer dans $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes :

a) $\alpha(X) = \frac{X}{(X+1)^2(X^2+1)}$ **b)** $\beta(X) = \frac{X+1}{(X^3-8)}$ **c)** $\gamma(X) = \frac{1}{X(X^2+X+1)^2}$
d) $\delta(X) = \frac{X}{(X-1)(X^2+1)^2}$ **e)** $\zeta(X) = \frac{X^2+X-3}{X^2-3X+2}$